

1901.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POCHENDORFF, G. UND E. WIEDENHAGEN.

VIERTHE FOLGE.

BAND 4. HEFT 2.

DER GANZEN VIERTE FOLGE, BAND 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, H. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL BRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1901.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in  
12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 36 M.*

*(Ausgegeben am 1. Februar 1901.)*

# Inhalt

	Seite
1. E. Hagenbach. Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction	293
2. F. Paschen. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers	377
3. F. Paschen. Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flussspates im Ultrarot	399
4. F. Paschen. Bestimmung des selectiven Reflexionsvermögens einiger Planspiegel	504
5. Egon v. Schweidler. Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrics beim Durchgange eines elektrischen Stromes	307
6. I. Klemenčič. Ueber die Prüfung von Magnetstahlorten	316
7. R. Wachsmuth. Bestimmung der Wechsellzahl eines Wechselstromes	338
8. K. Kerkhof. Ueber die Temperaturen in Geissler'schen Röhren	327
9. Heinrich Jaeger. Magnetische Spiegelbilder	345
10. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung von Capillaritätsconstanten condensirter Gase	367
11. Eduard Biecke. Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft	378
12. Eduard Biecke. Ueber Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen	388
13. J. Stark. Ueber Ionisirung durchströmter Gase und die unipolare Entladung an glühenden Körpern	409
14. Edmund van Aubel. Ueber das thermoelektrische Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide	416
15. Edmund van Aubel. Ueber die Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz Neumann-Joule-Kopp	430
16. W. Wien. Zur Theorie der Strahlung; Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck	423

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Giessen, Nährungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte druckfertig einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwandten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzureichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweiter Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.



# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 4.

### 1. *Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction*<sup>1)</sup>; von E. Hagenbach.

Hr. Lecher<sup>2)</sup> beschreibt einige Versuche, welche ihn veranlassen, die in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebene Erklärung mancher Rotationsversuche für einen „theoretischen und experimentellen Trugschluss“ zu erklären. Da ich mit den Behauptungen des Hrn. Lecher nicht einverstanden bin, so habe ich in Verbindung mit Hrn. H. Veillon eine Anzahl Versuche angestellt, um Aufschluss zu erhalten über die so verschieden aufgefassten Vorgänge, die sich einerseits beziehen auf die elektromagnetischen Rotationsversuche, wie sie bald nach der Oersted'schen Entdeckung von Faraday<sup>3)</sup> und Ampère<sup>4)</sup> zuerst angestellt und untersucht und dann durch viele Forscher in mannigfacher Weise wiederholt und modificirt worden sind, und andererseits auf die damit zusammenhängenden Inductionerscheinungen, die von Wilh. Weber<sup>5)</sup> mit dem vielleicht nicht ganz passenden Namen der unipolaren Induction bezeichnet worden sind. Die Beziehungen zwischen Strom und Magnetismus finden einen klaren, bestimmten Ausdruck im Biot-Savart'schen Gesetze; es entsteht somit in erster Linie die Frage, ob die beobachteten Erscheinungen aus diesem Gesetze erklärt werden können;

1) Programm der Rectoratsfeier der Universität Basel. 1900.

2) E. Lecher, Wied. Ann. **69**. p. 781. 1899.

3) M. Faraday, Exp. Research. **2**. p. 127. 1821.

4) A. M. Ampère, Ann. de chim. et de phys. **20**. p. 60. 1822; **37**. p. 113. 1828; Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la société française de physique **2**. p. 192. 1885; **3**. p. 246 u. 275. 1887.

5) W. Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, herausgegeben von Gauss u. Weber p. 63. 1839; Pogg. Ann. **52**. p. 353. 1841.

soweit meine Versuche gehen, glaube ich dies behaupten zu können.

Der von mir gebrauchte Apparat war im wesentlichen mit dem in Fig. 1 der citirten Abhandlung des Hrn. Lecher dargestellten übereinstimmend; nur war die mit *a* bezeichnete axiale Zuleitung fest mit dem Magnet verbunden, und es war ferner die Einrichtung getroffen, dass man den Versuch auch nur mit *einem* Magnet anstellen, und diesen sowohl centrisch als excentrisch einstellen konnte.

1. Versuche mit einem centrisch gestellten, d. h. um seine eigene Axe drehbaren Magnet.

Ein cylindrischer Magnetstab (Fig. 1), der oben den Südpol *S* und unten den Nordpol *N* hat und bei 15 cm Länge einen Durchmesser von 1 cm besitzt, ist in Spitzenlagern *d* und *e*, die mit Quecksilber angefüllt sind, leicht drehbar. Man kann von oben oder unten den treibenden Strom zuleiten oder den inducirten Strom ableiten und zwar vollkommen axial, wenigstens so weit, als eine Einwirkung noch merklich sein kann. Ferner kann in der Mitte des Magnets bei *C* oder an einer beliebigen anderen Stelle der Strom zu- oder abgeleitet werden. Bei Zuleitung des treibenden Stromes, wobei die zu beobachtende Drehung durch die Reibung möglichst wenig gehindert werden darf, war der Schleifcontact durch eine unmittelbar am Magnet mit Hülfe eines Korkes angebrachte Quecksilberrinne gebildet; während bei der Ableitung des inducirten Stromes der Draht entweder unmittelbar

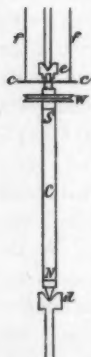


Fig. 1.

oder zur Verminderung der Thermoströme vermittelst einer mit eingedrehter Rinne versehenen Kupferhülse angelegt wurde. Zur Erzeugung der Inductionsströme konnte dem Apparat mit einem kleinen Elektromotor durch die Rolle *w* eine möglichst gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit erteilt werden.

Wir wollen nun theoretisch bestimmen, was aus dem Biot-Savart'schen Gesetz für die Drehung des Apparates durch den Strom und für die Induction eines Stromes durch die Drehung folgt.

Wenn wir einen magnetischen Pol von der Stärke  $\mu^1$ ) und im Abstand  $\rho$  ein Leiterelement  $ds$  haben, durch welches ein Strom von der Intensität  $i$  geht, wenn ferner  $\vartheta$  den Winkel bedeutet, den das Element  $ds$  mit der Verbindungslinie  $\rho$  bildet, so erhalten wir bekanntlich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze die Kraft:  $i\mu \sin \vartheta ds / \rho^2$ . Die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch das Element  $ds$  und den Abstand  $\rho$  gehenden Ebene; sie wirkt in gleicher Grösse und Richtung auf  $\mu$  und auf  $ds$ , nur ist der Sinn für  $\mu$  und  $ds$  umgekehrt; er wird für  $\mu$  durch die Ampère'sche und für  $ds$  durch die Fleming'sche Regel bestimmt.

Wenn Magnetelement und Stromelement zwei verschiedenen Körpern angehören, von welchen der eine fest und der andere drehbar ist, wie das bei den magnetoelektrischen Maschinen, bei den Dynamos, bei den Elektromotoren, bei den Messapparaten für elektrische Ströme und auch bei einigen Rotationsapparaten der Fall ist, so wird kaum bezweifelt werden, dass die Bewegungserscheinungen nach dem Biot-Savart'schen Gesetze und die Inductionserscheinungen nach dem Lenz'schen Gesetze erklärt werden können.

Wenn jedoch das Stromelement und das magnetische Element dem gleichen Körper angehören und fest miteinander verbunden sind, so entsteht die Frage, ob auch dann das Biot-Savart'sche Gesetz zur Geltung kommt, und ob hier durch innere Kräfte zwischen den Teilen eines starren Körpers eine Bewegung und umgekehrt durch die Bewegung desselben ein Inductionsstrom erzeugt werden kann.

In diesem Fall erhalten wir nämlich ein Drehungsmoment  $i\mu \sin \vartheta ds / \rho$ , das auf den Körper wirkt, dem  $ds$  und  $\mu$  angehören. Wenn wir nur die Wirkung dieses aus inneren Kräften entstehenden Drehungsmomentes betrachten, so kommen wir auf ein Unding. Dasselbe kann fortwährend einen Widerstand überwinden oder Geschwindigkeit erzeugen und somit Arbeit leisten, ohne dass die potentielle Energie vermindert wird oder sonstwo eine entsprechende Energiemenge verloren geht. Allein

1) Wir bezeichnen nach dem Vorgang von Ampère und Gauss die Magnetismusmenge mit  $\mu$ , da hier eine Verwechslung nicht möglich ist mit dem  $\mu$ , das in neuerer Zeit für die magnetische Permeabilität gebraucht wird.

ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir in Betracht ziehen, dass das Stromelement nicht nur ein Massenteilchen ist, von dem eine Kraft ausgeht, sondern ein Bahnelement, dem fortwährend von aussen Strom zugeführt werden muss, und welches nur mit Aufwand von Energie durch das magnetische Feld bewegt werden kann. Der Widerspruch mit dem Satz der Erhaltung der Energie verschwindet, sobald wir zugleich die Induction in Rechnung ziehen.

Wenn der Leiter  $ds$  durch das magnetische Feld bewegt wird, so entsteht in demselben eine elektromotorische Kraft, und das Stromelement kann nur durch das magnetische Feld bewegt werden, wenn ihm fortwährend die zur Ueberwindung der inducirten elektromotorischen Gegenkraft nötige Energie zugeführt wird. Der Satz der Erhaltung der Energie stellt somit die Forderung, dass die überwundene elektromotorische Energie und die dafür aufgewandte mechanische Energie einander gleich seien.

Wenn wir mit  $de$  die im Element  $ds$  inducirte elektromotorische Kraft, mit  $f$  die Feldstärke, mit  $\vartheta$  den Winkel, den die Richtung des Elementes mit der Feldstärke macht, mit  $dt$  die unendlich kleine Zeit und mit  $dx$  den unendlich kleinen nach der Richtung der Kraft in der Zeit  $dt$  zurückgelegten Weg bezeichnen, so giebt die Bedingung, dass die aufgewandte elektrische Energie gleich ist der geleisteten mechanischen Arbeit:

$$i \, d e \, d t = f \sin \vartheta \, d s \, d x$$

oder

$$\frac{d e}{d s} = f \sin \vartheta \frac{d x}{d t} = f \sin \vartheta v,$$

wenn wir  $v$  die Geschwindigkeit nennen, mit welcher  $ds$  senkrecht zu der durch  $ds$  und die Feldrichtung gehende Ebene bewegt wird. Die in der Längeneinheit des bewegten Leiters erzeugte elektromotorische Kraft  $de/ds$  wirkt entgegen dem Sinne des Stromes  $i$ , oder, was dasselbe heisst, sie sucht einen Strom zu erzeugen, der in entgegengesetztem Sinne geht wie der Strom, welcher die Bewegung erzeugt.

Das bekannte Lenz'sche Inductionsgesetz folgt also notwendig aus dem Biot-Savart'schen Gesetze, wenn man den Satz der Erhaltung der Energie damit verbindet und an-

nimmt, dass die Energie zur Leistung der mechanischen Arbeit vom Strome geliefert werden muss. Es kann somit ohne Widerspruch auch für den Fall, dass Magnetpol und Stromelement dem gleichen starren Körper angehören, das Biot-Savart'sche Gesetz Verwendung finden; und wir wollen nun sehen, was aus dieser Auffassung für die Bewegung unseres Magnets durch den Strom und für die durch Drehung des Magnets inducirte elektromotorische Kraft folgt.

Um die Rechnung zu vereinfachen, ersetzen wir den wirklichen Magnet durch einen ideellen Magnet, der in der Distanz  $2l$  zwei gleich starke Pole hat, den Nordpol von der Stärke  $+\mu$  unten, und den Südpol von der Stärke  $-\mu$  oben. Wir denken uns also den ganzen freien Nordmagnetismus concentrirt in einem horizontalen Querschnitt beim Nordpol und den ganzen freien Südmagnetismus in einem horizontalen Querschnitt beim Südpol. Wenn schon diese Annahme den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht, so können dennoch die daraus abgeleiteten Folgerungen in Bezug auf die Grösse als eine erste Annäherung betrachtet werden. Für die Entscheidung der Hauptfrage, ob und wie durch innere Kräfte eine Drehung unseres Apparates zu stande kommt, ist es ganz gerechtfertigt, die für den ideellen Magnet berechneten Wirkungen auch für den wirklichen Magnet anzunehmen, da wir ja den wirklichen Magnet auffassen können als eine Uebereinanderlagerung von unendlich vielen gleichgerichteten ideellen Magneten, die mit den Indifferenzpunkten aufeinander liegen, deren Längen von Null bis zur Länge des wirklichen Magnets variiren und deren Polstärken der Intensität des freien Magnetismus an den entsprechenden Punkten proportional sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Strom von der Intensität  $i$  in der Mitte des Magnetstabes durch einen horizontalen Draht zugeleitet und am oberen Ende des Magnets jenseits des Südpoles durch einen verticalen Draht abgeleitet wird, wie dies in Fig. 2 angedeutet ist; nur muss man sich denken, dass der elektrische Strom im Magnet nicht in einer Linie, sondern in der ganzen Breite des Magnets fliesst. Die Wirkung der äusseren horizontalen Zuleitung auf den Nordpol und den Süd-

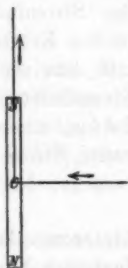


Fig. 2.

pol bewirkt ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe, dessen Componente in der Richtung der verticalen Axe gleich Null ist; für die Erklärung der Drehung fällt also die äussere horizontale Zuleitung ausser Betracht. Die ganze Wirkung lässt sich nur erklären aus den Kräften, mit welchen der verticale Strom auf den freien Strom der Pole wirkt.

Fig. 3 stellt einen Horizontalschnitt durch den Magnet beim Südpol vor. Wir zerlegen den Strom  $i$  in ein Bündel paralleler Stromfäden von der Stärke  $di$  und den freien Magnetismus des Südpoles  $\mu$  in magnetische Elemente von der Stärke  $d\mu$ . Wir bezeichnen mit  $\rho$  den Abstand von  $di$  und  $d\mu$ ; der grösstmögliche Wert von  $\rho$  ist der Durchmesser des Magnets. Im vorliegenden Fall, wo wir einen im



Fig. 3.

Vergleich zum Durchmesser langen Magnet haben und der Strom nach oben noch weit in verticaler Richtung fortgeführt wird, ist  $\rho$  stets klein im Vergleich zu den Längen des Stromfadens zu beiden Seiten des Südpoles. Wir bekommen somit einen nur um wenig zu grossen Wert, wenn wir bei der Berechnung der Wirkung den Stromfaden nach beiden Seiten ins Unendliche verlängern. Die Kraft, mit der ein Stromfaden  $di$  auf ein magnetisches Element  $d\mu$  wirkt, ist dann  $2 di d\mu / \rho$  in der Richtung des Pfeiles; mit einer gleich grossen Kraft, aber in entgegengesetztem Sinn, wie der Pfeil bei  $di$  andeutet, wird der Stromfaden vom magnetischen Element getrieben; die beiden Kräfte geben zusammen das Drehungsmoment  $2 di d\mu$ , mit dem  $di$  und  $d\mu$  aufeinander wirken. Die Wirkung des Stromfadens auf den ganzen Magnetismus des Südpoles ist  $2 di \mu$ , und für das Drehungsmoment  $D$ , mit welchem der ganze Strom  $i$  auf den Südpol wirkt, erhalten wir

$$D = - 2 i \mu;$$

wir setzen das negative Zeichen, da bei unserer Voraussetzung, dass der Nordpol unten ist und der Strom von unten nach oben geht, die hervorgebrachte Drehung eine negative ist, d. h. im Sinne des Uhrzeigers geht. Die Wirkung zwischen Nordpol und Strom ist bei den oben angenommenen Verhältnissen zwischen Länge und Durchmesser des Magnets zu vernachlässigen.

Wenn der Strom  $i$  das Drehungsmoment  $D$  giebt, so muss, wie wir oben schon gezeigt haben, infolge des Satzes der Erhaltung der Energie durch Induction eine dem Strom  $i$  entgegenwirkende elektromotorische Kraft  $e$  erzeugt werden, deren elektrische Arbeit für jede Zeit und somit auch für die Zeiteinheit gleich und entgegengesetzt ist der mechanischen Arbeit des Drehungsmomentes; wenn wir also die Winkelgeschwindigkeit mit  $\omega$  bezeichnen, so haben wir:

$$D\omega = -ei,$$

oder

$$\frac{D}{i} = -\frac{e}{\omega};$$

wir bezeichnen  $D/i$ , das heisst das von dem Strom *eins* erzeugte Drehungsmoment mit  $D_1$  und  $e/\omega$ , das heisst die bei der Winkelgeschwindigkeit *eins* erzeugte elektromotorische Kraft mit  $e_1$  und haben dann ganz allgemein bei jedem drehbaren starren Körper, der freien Magnetismus enthält und von einem Strome durchflossen wird, die einfache Beziehung

$$D_1 = -e_1.$$

Das umgekehrte Zeichen von  $D_1$  und  $e_1$  besagt, dass bei gleichgesinnter Drehung der treibende Strom und die inducirte elektromotorische Kraft in entgegengesetztem Sinne gehen.

Im vorliegenden Fall ist

$$D_1 = -e_1 = -2\mu.$$

Um das Ergebnis der Versuche mit dem Resultate der Theorie zu vergleichen, war es vor allem nötig, die Grösse  $\mu$  zu bestimmen. Wir haben dieselbe aus dem magnetischen Momente abgeleitet, indem wir die Poldistanz gleich  $\frac{1}{10}$  der Magnetlänge, also im vorliegenden Fall gleich 12,5 cm annahmen.

Die magnetischen Momente der von uns angewandten Magnete bestimmten wir aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage unter Annahme der von Hrn. H. Veillon für unser Laboratorium bestimmten Horizontalcomponente des Erdmagnetismus. Es ergab sich für den einfachen Magnet von 15 cm

$$\mu = 148 \text{ C}^2/\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}.$$



Wiederholte Bestimmungen während der Versuchszeit haben bei diesem Magnet eine so geringe Abnahme des Momentes ergeben, dass wir dieselbe nicht zu berücksichtigen brauchen. Somit ergibt sich bei dem vorliegenden Apparate für das Drehungsmoment bei der Einheit der Stromstärke und für die inducirte elektromotorische Kraft bei der Einheit der Winkelgeschwindigkeit

$$-D_1 = e_1 = 296 \text{ C}^{\frac{1}{2}} \text{ G}^{\frac{1}{2}} \text{ S}^{-1}.$$

Es handelt sich nun darum, dieses durch die theoretische Rechnung gefundene Resultat durch die Versuche zu prüfen, und zwar an dem gleichen Apparate für das Drehungsmoment und für die inducirte elektromotorische Kraft.

Beim Durchleiten des Stromes wurde der Apparat in sehr kräftige Drehung versetzt<sup>1)</sup> und zwar in dem durch die Rechnung angegebenen Sinne. Da eine nicht unbedeutende Reibung in den Lagern und an der Zuleitungsstelle des Stromes zu überwinden war, so musste ein Strom von 10–20 Ampère angewandt werden. Es wäre nun ziemlich schwierig gewesen, während der Rotation des Apparates durch einen Versuch die Grösse des Drehungsmomentes zu bestimmen. Wir haben deshalb diese Messung im ruhenden Zustande des Gleichgewichtes vorgenommen, indem wir den unten in einem Quecksilbernapf tauchenden Magnet vermittelt eines kleinen Querbalkens *cc* (Fig. 1) an zwei Coconfäden *f* bifilar aufhängten und mit Spiegelablesung den Winkel der Drehung bestimmten, den ein Strom von bestimmter Stärke hervorbrachte. Die Stromstärke wurde mit einem Präcisionsampèremeter von Siemens & Halske ermittelt.

Das Drehungsmoment *D* wird bestimmt nach der Formel

$$D = \frac{P a b \sin \varphi}{h},$$

wenn *P* das Gewicht des aufgehängten Apparates, *a* die halbe Fadendistanz oben, *b* die halbe Fadendistanz unten, *h* die Länge der Fäden und  $\varphi$  den Drehungswinkel bedeutet.

1) Diese Rotation eines Magnets um seine eigene Axe wurde zuerst von Ampère gezeigt, während Faraday dieselbe anfänglich für nicht möglich hielt. Collect. de mém. 2. p. 163 und p. 201. 1885; 3. p. 258 und p. 275. 1887; M. Faraday, Exp. Res. 2. p. 181. 1844.



Es wurde nun vorerst das im Grunde selbstverständliche Resultat, dass das Drehungsmoment der Stromstärke proportional ist, durch den Versuch bestätigt und dann der numerische Wert des Drehungsmomentes ermittelt.

Die Messung ergab für  $2a$  3,725 cm, für  $2b$  3,70 cm, für  $h$  128,3 cm, für die Masse des Apparates durch Wägung 190,755 G, für die Ablesung an der Scala bei zwei Meter Abstand 568 mm, woraus sich für  $\sin \varphi$  der Wert  $568/4000$  ergibt; wir nehmen ferner für die Beschleunigung der Schwerkraft den für unser Laboratorium ermittelten Wert 980,8 C/S<sup>2</sup>, also für das Gewicht  $P$  190,755 · 980,8. Die Stromstärke wurde zu 21,5 Ampère oder 2,15 C<sup>1</sup>/<sub>2</sub> G<sup>1</sup>/<sub>2</sub> S<sup>-1</sup> ermittelt. Mit diesen Zahlen finden wir für das Drehungsmoment bei der Stromstärke eins:

$$-D_1 = 322 \text{ C}^1 \text{ G}^1 \text{ S}^{-1}.$$

Diese Uebereinstimmung des beobachteten Drehungsmomentes 322 mit dem berechneten 296 halten wir für befriedigend, wenn wir in Betracht ziehen, dass die Berechnung für einen ideellen Magnet gemacht ist. Da bei dem wirklichen Magnet nicht der gesamte freie Magnetismus in einem Abstand von der Mitte sich befindet, welcher  $\frac{5}{6}$  der halben Poldistanz beträgt, sondern zu grossem Teil in einem kleineren Abstand, so hat  $\mu$  jedenfalls einen grösseren Wert als den von uns berechneten.

Wir gehen nun über zur Ermittlung der beim Drehen unseres Apparates durch Induction erzeugten elektromotorischen Kraft. Mit Hülfe eines kleinen Elektromotors wurde der Apparat in möglichst gleichförmige Rotation versetzt und die erzeugte elektromotorische Kraft mit einem empfindlichen Galvanometer nach Deprez-d'Arsonval von Edelmann bestimmt. Der Wert eines an der Scala abgelesenen Teilstriches wurde für jede Versuchsreihe durch Aichung ermittelt. Bei diesen Messungen wirken die Thermostrome störend, doch kann man deren Einfluss grösstenteils eliminieren, wenn man den Magnet nacheinander in entgegengesetztem Sinne rotiren lässt und die dazu gehörigen Ablenkungen abliest.

Auch hier wurde zuerst durch den Versuch das im Grunde selbstverständliche Resultat bestätigt, dass die erzeugte elektromotorische Kraft der Winkelgeschwindigkeit proportional ist;

auch ergab sich, dass der Sinn der Ablenkung vollkommen mit der Theorie stimmte.

Die Bestimmung des numerischen Wertes ergab für die elektromotorische Kraft  $14510 \text{ C}^{\frac{1}{2}} \text{ G}^{\frac{1}{2}} \text{ S}^{-2}$  bei 177 Umdrehungen in 24,52 Secunden oder einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  von  $45,36 \text{ S}^{-1}$ . Daraus folgt für die elektromotorische Kraft bei der Winkelgeschwindigkeit *eins*

$$e_1 = 320 \text{ C}^{\frac{1}{2}} \text{ G}^{\frac{1}{2}} \text{ S}^{-1},$$

was mit dem beobachteten  $D_1$  und auch mit dem berechneten  $e_1$  in befriedigender Weise übereinstimmt.

Hr. Ebert<sup>1)</sup> berichtet von einem ganz gleich angeordneten Versuche, wo auch in der Mitte des Magnets und am Ende ausserhalb des Poles der inducirte Strom abgeleitet wurde, dass er mit einem empfindlichen Galvanometer selbst bei raschem Drehen keinen merklichen Ausschlag erhalten habe. Es muss hier wohl ein Missverständnis vorliegen, da bei meinen Versuchen, wenn ich etwas schnell laufen liess, die Ablenkung über 500 Teilstriche betrug, also nahezu über die Scala hinausging.

Wir haben bei unserer theoretischen Berechnung des Drehungsmomentes angenommen, dass die Ableitung in der Mitte des Magnets stattfindet. Wenn wir den Ableitungsdraht nach der Seite des Südpoles verschieben, so muss schon bei dem von uns vorausgesetzten ideellen Magnet, wo die freien Magnetismen in den Querschnitten des Nordpoles und Südpoles concentrirt gedacht sind, die inducirte elektromotorische Kraft etwas abnehmen, da die gemachte Voraussetzung, dass  $\rho$  klein sei im Verhältnis zu den Längen des Stromes auf beiden Seiten des Südpoles, um so weniger zutrifft, als wir uns dem Südpol nähern. Allein diese Abnahme muss noch viel bedeutender werden durch den Umstand, dass bei dem wirklichen Magnet ein wesentlicher Teil des freien Magnetismus näher bei dem Centrum des Magnets liegt als der angenommene Pol. Es ist also zu erwarten, dass bei der Verschiebung des Schleifcontactes nach dem Südpol zu, und in ganz gleicher Weise bei einer entsprechenden Verschiebung nach der Seite des Nordpoles, die inducirte elektromotorische Kraft erst langsam und

1) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder. Versuch 91, p. 250. 1897.

in der Nähe des Poles schnell abnehme, wie die folgenden Zahlen zeigen; es sind dieselben durch graphische Interpolation aus den Ablenkungen erhalten, die beim Anlegen des Drahtes in verschiedenen Abständen von der Mitte des Magnets erhalten worden sind.

Abstand der Ableitungsstelle des Drahtes von der Mitte des Magnets in Centimetern	0	1	2	3	4	5	6	7
Beobachtete elektromotorische Kraft für die Winkelgeschwin- digkeit eins	322	317	307	284	254	215	163	90

Solche Beobachtungen sind wohl sehr gut geeignet, die Verteilung des freien Magnetismus in einem Magnetstab zu untersuchen; es hat darauf schon Wilh. Weber<sup>1)</sup> in seiner Abhandlung über die unipolare Induction aufmerksam gemacht.

Man kann auch mit der Vorstellung der Kraftlinien über die Entstehung der elektromotorischen Kraft bei einem ideellen und bei einem wirklichen Magnet in der folgenden Weise sich Rechenschaft geben.

Wenn  $S$  und  $N$  in Fig. 4a die Pole eines linearen ideellen Magnets sind, d. h. eines solchen, bei welchem der ganze Nordmagnetismus  $+\mu$  in einem Punkte  $N$  und der ganze Süd magnetismus  $-\mu$  in einem Punkte  $S$  concentrirt ist, so gehen alle Curven der Kraftlinien von dem einen Pole aus und verlaufen, ohne sich zu schneiden, nach dem anderen Pole, in welchem sie wieder alle zusammentreffen; die Zahl dieser Kraftlinien ist  $4\pi\mu$ . Nun sei  $ABD$  eine beliebige mit dem Magnet fest verbundene Strombahn, die zwei auf der Axe liegende Punkte miteinander verbindet, von welchen  $D$  ausserhalb des Poles  $S$  und  $A$  zwischen den beiden Polen liegt. Magnet und Strombahn werden um die Axe  $SCN$  gleichförmig gedreht. Wenn in der Secunde eine ganze Umdrehung stattfände, so würden alle  $4\pi\mu$  Kraftlinien von der Strombahn  $ABD$  einmal oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten, und es wäre die erzeugte elektromotorische Kraft  $4\pi\mu$ ;



Fig. 4a.

1) W. Weber, Pogg. Ann. 52. p. 382, 1841.

da aber in der Secunde der Winkel  $\omega$  beschrieben wird, so haben wir für die elektromotorische Kraft  $e$ , welche gleich ist der Zahl der in einer Secunde durchschnittenen Kraftlinien, das Verhältniss:

$$\frac{e}{4\pi\mu} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ oder } \frac{e}{\omega} = e_1 = 2\mu.$$

Dies gilt bei dem linearen ideellen Magnet, auch wenn  $ABD$  wie  $AB_1D$  ganz nah an die Axe sich anschliesst. Auch kann an die Stelle der einen Strombahn ein ganzes Bündel von Stromfäden treten; das Resultat bleibt genau dasselbe, wenn sie alle von  $A$  ausgehen und sich in  $D$  wieder treffen; auch kann der Punkt  $A$  ganz beliebig auf dem Magnet verschoben werden, nur muss der Pol stets zwischen den Punkten  $D$  und  $A$  sein. Es stimmt dies genau mit dem oben in anderer Weise abgeleiteten Resultate.

Bei einem wirklichen Magnet gehen nicht alle Kraftlinien von einem Punkte aus, manche verlaufen, wie in Fig. 4b durch die punktirte Linie angedeutet ist, vom Ende des Magnets aus noch einige Zeit nahe der Axe im Magnet selbst und treten erst später aus. Es zeigt sich das schon deutlich bei den magnetischen Figuren, die Faraday<sup>1)</sup> im Jahr 1851 abgebildet hat. Die mit dem drehbaren Magnet fest verbundene Strombahn  $ABD$  wird also bei der Drehung die Kraftlinien nicht schneiden, welche erst zwischen  $A$  und  $C$  aus dem Magnet austreten; es gilt das auch, wenn die Strombahn so nah an die Axe rückt, dass sie im Magnet selbst verläuft, wie das



Fig. 4b.

bei den Stromfäden unseres Apparates der Fall ist. Es wird also  $e_1$  um so kleiner werden, je weiter  $A$  von  $C$  nach dem Ende hin vorrückt, wie das auch die Beobachtungen ergeben haben.

Wenn der Strom nicht seitlich sondern axial von unten zugeleitet und oben axial abgeleitet wird, so ist nach obiger Betrachtung das Drehungsmoment, das durch die Wirkung des Stromes auf den Südpol  $S$  entsteht, genau gleich und entgegengesetzt dem Drehungsmomente, das durch die Wir-

1) M. Faraday, Exp. Research. 3. p. 399. 1855.

kung des Stromes auf den Nordpol  $N$  entsteht; die drehende Wirkung ist also Null und ebenso auch die durch Rotation erzeugte elektromotorische Kraft. Der Versuch hat diese selbstverständlichen Folgerungen bestätigt.

Es wurden nun ganz gleiche Versuche mit einem halb so langen Magnet gemacht, der nach beiden Seiten durch messingene Fortsätze verlängert war und somit in den gleichen Rahmen eingesetzt werden konnte.

Die Magnetismussmenge  $\mu$  wurde zu 91,8 bestimmt zu der Zeit der Versuche über Induction und zu 76,5 zu der Zeit der Versuche über das Drehungsmoment.

Das berechnete Drehungsmoment für den Strom *eins* ist somit 153, der Versuch mit Bifilarsuspension ergab 162.

Die Versuche über Induction ergaben für  $e_1$  die Grösse 180 bei der Magnetismussmenge 91,8, oder 150, wenn wir  $e_1$  auf die Magnetismussmenge 76,5 reduciren.

Wir stellen nochmals die Zahlen der Berechnung und der Versuche für die beiden centrisc eingesetzten Magnete mit directer Zuleitung des Stromes in der Mitte zusammen:

	$\mu$	$2\mu$	$D_1$	$e_1$
Magnet von 15 cm	148	296	322	320
Magnet von 7,5 cm	76,5	153	162	150

Die für  $D_1$  und  $e_1$  gefundenen Zahlen sollten, ganz abgesehen von der Auffassung, die wir über die Wirkungsweise haben, genau miteinander übereinstimmen, sobald das Lenz'sche Reciprocitätsgesetz zwischen ponderomotorischer und elektromotorischer Wirkung seine Geltung hat; die Unterschiede rühren offenbar daher, dass die vorhandenen Umstände des etwas primitiv ausgeführten Apparates und die verschiedenen störenden Einflüsse nicht eine hinlänglich genaue Bestimmung der zu messenden Grössen zulassen. Aus dem Ergebnis, dass die durch Beobachtung gefundenen Werte von  $D_1$  und  $e_1$  nur um wenig grösser sind als  $2\mu$ , darf auf die Richtigkeit unserer Auffassung geschlossen werden, besonders wenn man auch den schon besprochenen Unterschied des ideellen und wirklichen Magnets in Betracht zieht.

Wir haben nun weitere Versuche angestellt mit dem gleichen centrisc eingesetzten Magnet; nur haben wir den

Strom nicht direct dem Magnet zugeleitet, sondern durch Vermittelung einer mit Quecksilber gefüllten Rinne, in welche ein oder zwei horizontale mit dem Magnet fest verbundene und mit ihm sich drehende 5,35 cm lange Leitungsdrähte tauchten, wie dies Fig. 5 verdeutlicht.



Fig. 5.

Die Wirkung der äusseren festen Zuleitung zur Rinne auf den Magnet ist auch hier offenbar Null, da sie nur ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe giebt; das Gleiche gilt von dem Strom in der Rinne. Das Drehungsmoment bleibt deshalb gleich, wenn an verschiedenen Stellen, z. B. bei  $x$  oder bei  $y$  der Strom der Rinne zugeführt wird; was auch die Beobachtung bestätigt hat. Hingegen findet eine Wechselwirkung statt zwischen dem Magnet und dem mit ihm beweglichen Leiter; dieselbe liefert ein Drehungsmoment um die verticale Axe, wie folgende Rechnung zeigt:

Wenn wir die Länge des beweglichen Leiters mit  $R$  und den Abstand des Elementes  $d\varrho$  von der Axe mit  $\varrho$  bezeichnen, so erzeugen die beiden Pole an der Stelle des Elementes  $d\varrho$  eine nach oben gerichtete Feldstärke  $2i\mu/(\varrho^2 + l^2)^{3/2}$ ; somit wird das Element  $d\varrho$  nach hinten oder der Magnet nach vorn getrieben, und wir erhalten um die verticale Axe das Drehungsmoment  $2il\mu\varrho d\varrho/(\varrho^2 + l^2)^{3/2}$ , und wenn wir in Bezug auf  $\varrho$  von Null bis  $R$  integrieren, so bekommen wir:

$$D = 2i\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} \right) \quad \text{und} \quad D_1 = 2\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} \right).$$

Die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem mit ihm fest verbundenen Zuleitungsstrom giebt somit ein Drehungsmoment, das in umgekehrtem Sinne wirkt als die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem durch ihn selbst geleiteten Strom; das Drehungsmoment bei Zuleitung aus der Rinne ist somit die Differenz der beiden Wirkungen, und wir erhalten für diesen Fall:

$$D_1 = -e_1 = -2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}.$$



Es mussten deshalb sowohl bei dem grösseren als bei dem kleineren Magnet die Drehungsmomente, wenn der Strom aus der Rinne zugeleitet wurde, um

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$$

kleiner werden; die Versuche haben das vollkommen bestätigt, sowohl in betreff der Drehungsmomente als der inducirten elektromotorischen Kräfte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

	$\mu$	$2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$	$D_1$	$e_1$
Magnet von 15 cm	148	225	229	240
Magnet von 7,5 cm	76,5	77	85	76

Auch hier weichen  $D_1$  und  $e_1$  von dem durch die Theorie bestimmten Wert nicht mehr ab als unter sich. Wir dürfen also annehmen, dass die nicht sehr bedeutenden Abweichungen aus den mit der Unvollkommenheit des Apparates zusammenhängenden Störungen sich rechtfertigen lassen.

Wenn wir in der obigen Formel  $R$  unendlich werden lassen, so wird das Drehungsmoment  $D_1$  gleich Null. Das muss so sein, da in diesem Fall der Strom im Unendlichen geschlossen ist und nach dem weiter unten bewiesenen Satze die drehende Einwirkung eines geschlossenen mit dem Magnet fest verbundenen Leiters Null ist.

Wir betrachten nun ferner den Fall, dass der in einem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter fließende Strom nicht nur aus einer horizontalen Strecke besteht, sondern aus horizontalen und verticalen Strecken zusammengesetzt ist oder auch eine ganz beliebige Gestalt hat.

In Fig. 6 sei  $NS$  ein linearer ideeller Magnet,  $N$  der Nordpol,  $S$  der Südpol und  $C$  die Mitte.  $B$  ist ein Punkt auf der Axe ausserhalb  $S$  im Abstände  $a$ . Der Strom geht in

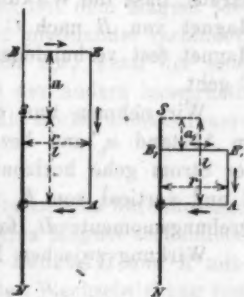


Fig. 6.

einer mit dem Magnet fest verbundenen Leitung horizontal von  $B$  nach dem um  $r$  abstehenden Punkte  $E$  und von  $A$  nach  $C$  und vertical von  $E$  nach  $A$ . Die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetze giebt uns für die Drehungsmomente  $D_1$  folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und  $AC$ :

$$2\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und  $EA$ :

$$\mu \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und  $BE$ :

$$\mu \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right),$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und  $BEAC$ :  $2\mu$ .

Wir haben früher gesehen, dass wenn der Strom im Magnet von  $C$  nach  $B$  geht,  $D_1$  gleich  $-2\mu$  ist; es folgt also daraus, dass die Wirkung die gleiche ist, wenn der Strom im Magnet von  $B$  nach  $C$  geht, als wenn er in dem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter von  $B$  über  $E$  und  $A$  nach  $C$  geht.

Wir nehmen nun einen Punkt auf der Axe innerhalb  $S$  im Abstand  $a_1$  und bezeichnen ihn mit  $B_1$  und nehmen an, der Strom gehe horizontal von  $B_1$  nach  $E_1$  und von  $A$  nach  $C$  und vertical von  $E_1$  nach  $A$ ; dann erhalten wir für die Drehungsmomente  $D_1$  folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und  $AC$ :

$$2\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und  $E_1A$ :

$$\mu \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l-a_1}\right)^2}} \right),$$



Wirkung zwischen Magnet und  $B_1 E_1$ :

$$\mu \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l - a_1}\right)^2}} - 2 \right).$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und  $B_1 E_1 AC$ : Null.

Aus diesen Resultaten können wir den folgenden Satz ableiten:

Wenn ein beliebiger auf der Axe zwischen den Polen liegender Punkt  $G$  durch horizontale und verticale vom Einheitsstrom durchflossene Bahnstrecken mit einem zweiten auf der Axe liegenden Punkte  $B$  fest verbunden ist, so ist das Drehungsmoment gleich  $2\mu$ , wenn  $B$  ausserhalb der Pole, und gleich Null, wenn  $B$  innerhalb der Pole liegt. Der Satz gilt auch, wenn wir durch mehrere sich aneinander anschliessende horizontale und verticale Linien von  $G$  nach  $B$  gelangen, und da wir ferner eine beliebige Curve aus unendlich kleinen horizontalen und verticalen Linienelementen uns zusammengesetzt denken können, so kann unser Satz folgende Form annehmen:

Das aus der Wechselwirkung eines Magnets und eines Einheitsstromes, der in einer beliebigen mit dem Magnet fest verbundenen Bahn zwei Punkte der Axe miteinander verbindet, entstehende Drehungsmoment ist gleich  $2\mu$ , wenn der eine Punkt zwischen den beiden Polen und der andere ausserhalb derselben liegt, und gleich Null, wenn die beiden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Pole liegen.

Es folgt daraus weiter:

Wenn eine ganz beliebige vom Einheitsstrom durchflossene und fest mit dem um seine Axe drehbaren Magnet verbundene Strombahn zwei willkürlich gewählte Punkte  $H$  und  $K$  miteinander verbindet, so hängt das aus der Wechselwirkung von Magnet und Strom entstehende Drehungsmoment nur ab von der Lage der Punkte  $H$  und  $K$ , keineswegs aber von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Es ergibt sich das aus Fig. 6. Wir verbinden  $E_1$  mit  $E$  durch eine ganz beliebige Strombahn. Die Wirkung von  $S$  auf  $B_1 E_1 EB$  ist gleich  $2\mu$  und somit die Wirkung auf die

Strombahn  $E_1 E$  gleich  $2\mu$  vermindert um die Wirkung auf  $B_1 E_1$  und  $EB$ ; und diese Differenz ist unabhängig von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Das aus der Wechselwirkung von einem drehbaren Magnet und einer damit fest verbundenen geschlossenen Strombahn entstehende Drehungsmoment ist Null, da ein geschlossener Strom stets aufgefasst werden kann als ein solcher, der zwischen zwei beliebigen Punkten auf verschiedenen Wegen hin und her geht.

Diese allgemeinen Sätze lassen sich auch sehr leicht ohne weitere Rechnung aus der Anschauung der Kraftlinien in folgender Weise ableiten:



Fig. 7.

Bei einem linearen ideellen Magnet (Fig. 7) gehen von jedem Pol  $4\pi\mu$  Kraftlinien aus. Wenn von einem Punkte  $B$  auf der Achse ausserhalb  $S$  eine mit dem Magnet fest verbundene Strombahn auf beliebigem Weg nach dem Punkte  $G$  geht, der zwischen den Polen auf der Achse liegt, so werden bei einer Umdrehung alle Kraftlinien *ein* oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten. Die in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien verhalten sich zu  $4\pi\mu$  wie  $\omega$  zu  $2\pi$ , und daraus folgt:

$$D_1 = -e_1 = -2\mu.$$

Wenn jedoch  $B$  innerhalb  $S$  liegt, so werden bei einer Umdrehung nur eine beschränkte von der Gestalt der Curve abhängige Zahl von Kraftlinien geschnitten, und zwar jede zwei oder eine gerade Anzahl mal; somit ist in diesem Fall  $e_1$  und auch  $D_1$  gleich Null.



Fig. 8.

In Fig. 8 verbindet die willkürlich gezogene mit dem Magnet fest verbundene Strombahn zwei beliebige Punkte  $H$  und  $K$ . Die beiden punktierten Linien bedeuten die beiden durch  $H$  und durch  $K$  gehenden Kraftlinien. Nun schneidet die willkürlich gezogene Curve  $KH$  alle Kraftlinien, die zwischen den beiden punktierten Linien liegen, *einmal* oder eine ungerade Anzahl mal, alle Kraftlinien aber, die ausserhalb der beiden punktierten Linien liegen, gar nicht oder eine gerade Anzahl mal. Wenn nun die Curve um die Magnetaxe gedreht

wird, so sind die *ein* mal oder eine ungerade Anzahl mal durchschnittenen Kraftlinien proportional den Kraftlinien, die in der Ebene zwischen den punktierten Linien liegen. Da diese nur abhängen von der Lage der Punkte *H* und *K*, so gilt das Gleiche von  $D_1$  und  $e_1$ . Die gleiche Betrachtung kann angestellt werden, wenn *H* und *K* nicht mit dem Magnet in einer Ebene liegen.

Dieser letzte Satz gilt, wie leicht ersichtlich ist, nicht nur für einen ideellen, sondern auch für einen ganz beliebigen wirklichen Magnet; wir haben denselben durch folgende Versuche bestätigt gefunden.

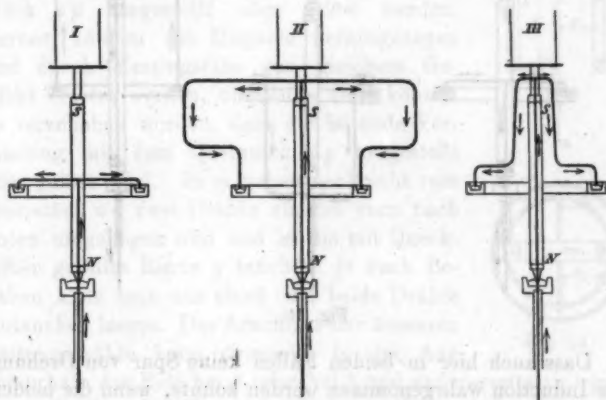


Fig. 9.

In Fig. 9 wird durch die stark ausgezogenen Linien angedeutet, wie bei dem gleichen bifilar aufgehängten Magnet auf den drei sehr verschiedenen Wegen *I*, *II* und *III* der Strom vom Quecksilbernapf unten, in welchen die verlängerte Axe eintauchte, zu den gleichen Stellen der Quecksilberrinne geleitet wurde. In allen drei Fällen zeigte sich eine sehr starke Ablenkung nach der gleichen Seite, und in den drei Fällen verhielten sich die gemessenen Drehungsmomente wie:

*I*    *II*    *III*

100 : 99,2 : 100,3.

Diese Gleichheit der Wirkung zeigte sich auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft durch Induction mit

den Apparaten *A*, *B* und *C* in Fig. 10, wo die Drähte des Galvanometers in den drei Fällen ganz gleich einerseits an einen Punkt der Axe ausserhalb des Poles und andererseits an die Rinne anschliessen, während die durch stark ausgezogene Linien angedeuteten Strombahnen ganz verschieden sind; es verhielten sich die bei gleicher Winkelgeschwindigkeit erhaltenen elektromotorischen Kräfte wie:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 100 : 100,9 : 99,8. \end{array}$$

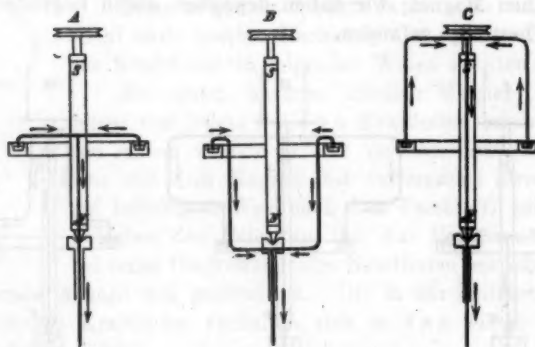


Fig. 10.

Dass auch hier in beiden Fällen keine Spur von Drehung oder Induction wahrgenommen werden konnte, wenn die beiden Zuleitungen des Stromes oder Ableitungen der Galvanometerdrähte an die Axe ausserhalb der Pole angelegt wurden, ist selbstverständlich.

## II. Versuche mit einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten.

Wir gehen nun über zu den Versuchen mit zwei parallelen, fest miteinander verbundenen gleichgerichteten und möglichst gleich starken Magneten, deren sich auch Hr. Lecher bei seinen Versuchen bediente. Fig. 11 zeigt in Aufriß und Grundriss den Apparat.

Die beiden Magnete sind durch messingene Querstücke *pp* und *nn* fest mit der Axe verbunden, die bei *d* und *e* in

Spitzenlagern läuft; der ganze Apparat ist somit leicht drehbar, und es kann ihm vermittelt der Rolle *w* eine Winkelgeschwindigkeit erteilt werden; um die elektrische Leitung herzustellen, wird Quecksilber in die Stahllager gethan. Das messingene Querstück *cc* dient zur Bifilaraufhängung; zur Ermittlung der Drehung wird auf die Axe ein Spiegel aufgesetzt. Was schief schraffirt ist, besteht aus einer isolirenden Substanz. Die Magnete sind etwas verschiebbar; es kann dadurch die leitende Verbindung der Magnete mit dem oberen Querstück *pp* hergestellt oder gelöst werden. Ferner können die Magnete herausgezogen und durch Messingstäbe von gleichem Gewicht ersetzt werden, und auch diese können so verschoben werden, dass die leitende Verbindung mit dem Querstück *pp* hergestellt oder gelöst wird. In *m* gehen senkrecht zum Querstück *nn* zwei Drähte ab, die vorn nach unten umgebogen sind und in die mit Quecksilber gefüllte Rinne *q* tauchen; je nach Belieben kann man nur einen oder beide Drähte eintauchen lassen. Der Anschluss der äusseren Leitungsdrähte kann einerseits in der Axe ausserhalb der Pole bei *g* oder bei *h* und andererseits an irgend einem Punkte der Rinne stattfinden. Wenn der Strom bei *g* oder *h* zugeleitet wird, so werden die äusseren Drähte bis auf grössere Distanz vom Apparat vertical weiter geführt, während für die Zuleitung zur Rinne horizontale Drähte benutzt werden.

Mit diesem Apparat kann man nun wie mit dem einfachen centrisc eingesezten Magnet dreierlei Versuche anstellen, nämlich:

1. den Apparat in die Spitzenlager einsetzen und durch den zugeleiteten Strom drehen;
2. den in die Spitzenlager eingesetzten Apparat vermittelt der Rolle in gleichförmige Rotation versetzen und dann die Rotationsgeschwindigkeit und die durch Induction erzeugte elektromotorische Kraft bestimmen;
3. den Apparat vermittelt des Querstückes *cc* bifilar auf-

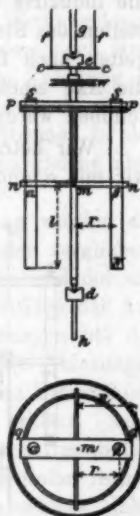


Fig. 11.

hängen, einen Strom von bestimmter Stärke durchleiten und die Ablenkung messen.

Die für den einfachen centrischen Magnet aus der Theorie abgeleiteten Sätze, dass das Drehungsmoment und somit auch die inducirte elektromotorische Kraft nur von den Anschlussstellen des Stromes, nicht aber von der Strombahn abhängen, gelten auch für die excentrisch eingesetzten Magnete, da ja die Axe eines Drehungsmomentes ganz beliebig parallel verschoben werden darf.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass beide Magnete, die wir mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen, eingesetzt sind; in der Fig. 12

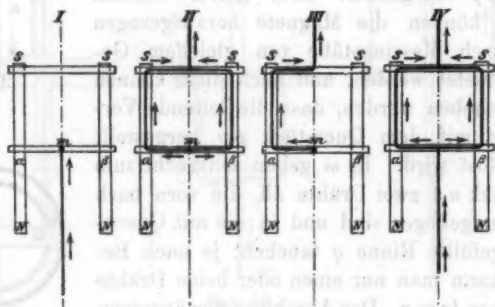


Fig. 12.

sind vier Combinationen für verschiedene Stromdurchleitung gegeben; der Weg des Stromes ist durch die stark ausgezogenen Linien angegeben. Bei *I* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung durch die Rinne, bei *II* und *III* ist die Zuleitung durch die Rinne und die Ableitung oben, bei *IV* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung oben. Nach der Theorie müssen wir für *I*, *II* und *III* gleich grosse Drehungsmomente bekommen, nur findet bei *I* eine Drehung im positiven, bei *II* und *III* aber eine Drehung im negativen Sinne statt. Bei *IV* hingegen erhalten wir ein Drehungsmoment Null, da die Wirkung des Stromes in der unteren Hälfte durch die Wirkung des Stromes in der oberen Hälfte genau aufgehoben wird.

Diese theoretischen Folgerungen sind durch die folgenden Versuche vollkommen bestätigt worden.



Die kräftige Drehung des Apparates durch einen Strom von 10—20 Ampère bei den Combinationen *I*, *II* und *III* und das vollkommene Stillstehen bei der Combination *IV* ist leicht zu zeigen. Diese vollständige Wirkungslosigkeit in der Combination *IV* hat sich auch bei den Versuchen des Hrn. Lecher<sup>1)</sup> gezeigt. Nur in der Erklärung der Wirkungslosigkeit gehen Hr. Lecher und ich weit auseinander; nach Hrn. Lecher soll die Wirkungslosigkeit der axialen Zuleitung in der unteren Hälfte dargethan werden, während nach meiner Auffassung die Wirkung des durchgeleiteten Stromes in der unteren Hälfte aufgehoben wird durch die genau gleiche aber entgegengesetzte Wirkung in der oberen Hälfte.

Bei den Versuchen über Inductionswirkung wurden die Combinationen *I* und *II* in der Art miteinander verglichen, dass der eine Draht an die Rinne angeschlossen und der andere abwechselungsweise oben und unten mit Punkten der Axe verbunden wurde. Das Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung oben verhielt sich zum Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung unten wie 100 zu 100,7, ein Unterschied, der aus den Beobachtungsfehlern sich vollauf erklärt. Auch wurde der Versuch so angestellt, dass man durch Umschalten einer Wippe, während der Apparat gleichförmig weiter rotirte, den Galvanometerdraht bald oben bald unten anschloss, dabei zeigte sich bei einer Ablenkung von mehr als 400 Teilstrichen eine nur ganz minime Aenderung, die offenbar von dem verschiedenen Widerstand oder störenden Thermoströmen herührte.

Der Vergleich der Induction bei den Combinationen *II* und *III* gab das der Gleichheit sehr nahe Verhältniss 100 : 101,5.

Bei der Combination *IV* erhielt man selbstverständlich keine Inductionswirkung.

Die folgenden Versuche über die Bestimmung des Drehungsmomentes mit Bifilarsuspension gaben ganz entsprechende Resultate.

Das Verhältniss des Mittels aus acht Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wurde wie 100 zu 101,6, und bei einer anderen Versuchs-

1) E. Lecher, Wied. Ann. 54. p. 283. Fig. 4. 1895; 69. p. 781. Fig. 1. 1899.

reihe das Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wie 100:99,6 gefunden.

Es sei hier noch erwähnt, dass stets bei den miteinander verglichenen Combinationen die Stromzuleitungen an der gleichen Stelle der Rinne stattfanden.

Bei der Combination *IV* ergab auch das Durchleiten eines Stromes von 21 Ampère keine Spur von Ablenkung.

Wir gehen nun über zu dem Fall, wo nur der Magnet  $\alpha$  excentrisch eingesetzt und der Magnet  $\beta$  durch einen Messing-

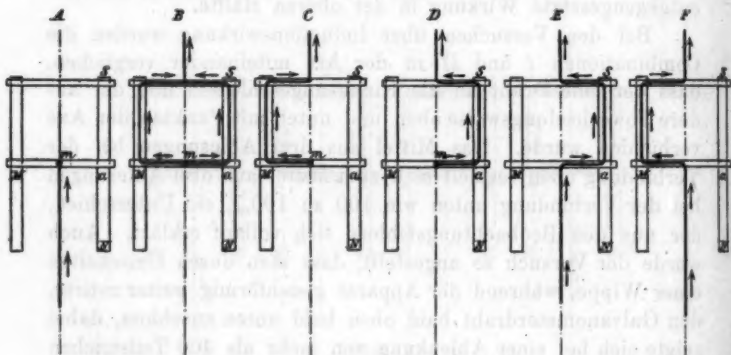


Fig. 13.

stab  $M$  ersetzt ist. In Fig. 13 sind sechs verschiedene Combinationen für die Durchleitung des Stromes gezeichnet.

Nach den oben entwickelten theoretischen Sätzen müssen die Combinationen *B*, *C* und *D* die gleiche Wirkung geben wie *A*, nur in entgegengesetztem Sinne, während bei *E* und *F* die Wirkung in der unteren Hälfte die gleich grosse Wirkung in der oberen Hälfte aufheben muss.

Die folgenden Versuche haben dies vollständig bestätigt.

Beim Durchleiten des Stromes tritt bei *A*, *B*, *C* und *D* Drehung ein, und zwar bei *A* eine positive, bei *B*, *C* und *D* eine negative. Auch bemerkt man sehr deutlich, dass hier bei der Anwendung von nur einem Magnet die drehende Kraft nur halb so gross ist; man muss 20–40 Ampère durch-



leiten, wenn man eine kräftige Drehung haben will. Bei den Combinationen  $E$  und  $F$  tritt absolut keine Wirkung ein.

Die Versuche über Induction ergaben für  $A, B, C, D$  Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & 99,7 & 101,8 & 102,9, \end{array}$$

und die Versuche über Ablenkungen bei Bifilarsuspension Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & 102,3 & 102,4 & 96,4. \end{array}$$

Aus diesen Zahlen darf auf Gleichheit der Wirkung geschlossen werden, da die verhältnismässig kleinen Abweichungen den durch die verschiedenen Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden dürfen. Auch machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Abweichungen bei den durch Induction und bei den durch Bifilarsuspension gefundenen Zahlen durchaus nicht parallel gehen. Dass in Bezug auf den Sinn der elektromotorischen Kräfte und der Drehungsmomente der Versuch mit der Theorie stimmte, ist selbstverständlich.

Für die Combinationen  $E$  und  $F$  war sowohl die Induction bei der Rotation des Apparates als die Drehung beim Leiten des Stromes durch den bifilar aufgehängten Apparat vollkommen Null.

Wir haben noch für den Apparat mit Doppelmagnet zu zeigen, inwiefern die aus der Theorie berechneten Drehungsmomente mit den durch den Versuch durch Bifilarsuspension ermittelten stimmten. Wir müssen also aus dem Biot-Savart'schen Gesetze ableiten, wie gross in diesem Fall das aus den inneren Kräften entstehende Drehungsmoment  $D_1$  ist, und ferner untersuchen, ob hier der Strom in den äusseren, fest bleibenden Zuleitungsdrähten und in der Rinne einen Einfluss auf die Drehung der Magnete ausübt und wie gross derselbe ist.

Wir bezeichnen mit  $R$  (Fig. 11) den Radius der Rinne oder die Länge des fest mit den Magneten verbundenen Zuleitungsdrahtes, mit  $r$  den halben Abstand der Magnete, mit

$l$  den halben Polabstand, mit  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\beta$  die Polstärken der Magnete  $\alpha$  und  $\beta$ .

Der mit den Magneten verbundene verticale Zuleitungsdraht setzt sich fort in einem festen verticalen Zuleitungsdraht, den wir als unendlich betrachten können; das Drehungsmoment, das aus der Wirkung zwischen dem Magnet  $\alpha$  und dem aus dem Unendlichen bis  $m$  gehenden Mitteldraht entsteht, erhalten wir, wenn das  $E$  in Fig. 6 ins Unendliche versetzt und somit  $a$  gleich  $\infty$  gesetzt wird, es giebt das:

$$D_1 = \frac{2\mu_\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}};$$

für die Wirkung zwischen dem Magnet  $\alpha$  und der horizontalen mit dem Magnet drehbaren Zuleitung  $R$  ergibt die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

$$D_1 = -2\mu_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}} \right),$$

und somit erhalten wir für das Drehungsmoment, das durch die Wirkung entsteht, welche der Magnet und der durch den verticalen und beweglichen horizontalen Draht geleitete Strom aufeinander ausüben, folgenden Wert:

$$D_1 = \frac{2\mu_\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

und, wenn beide Magnete eingesetzt sind:

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

Nun kommt aber noch dazu die Wirkung des fest bleibenden horizontalen Zuleitungsdrahtes und des Stromes in der Rinne, weil diese Wirkung hier, wo die Magnete excentrisch eingesetzt sind, nicht Null ist. Wir bezeichnen das durch die äusseren Kräfte verursachte Drehungsmoment, mit welchem der Einheitsstrom in dem festen horizontalen Zuleitungsdrahte und in der Rinne auf unsere Magnete einwirkt, mit  $\mathfrak{D}_1$ .

Dasselbe hängt von der gegenseitigen Lage der Magnete zu diesen Zuleitungen ab. Für die drei in Fig. 14 skizzierten Stellungen, wo nur ein Magnet eingesetzt ist, der Strom im axialen Mitteldraht von unten zugeleitet und in verschiedener



Fig. 14.

Weise aus der Rinne abgeleitet wird, finden wir für die Drehungsmomente durch eine leicht auszuführende Rechnung folgende Werte:

Bei Stellung 1.: herrührend von der horizontalen Zuleitung: Null, und herrührend von der Rinne, da kein Strom darin ist: Null, somit

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung 2.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_a}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$2\mu_a \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = 2\mu_a \left( \frac{r}{l} - \frac{r}{l\sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right).$$

Bei Stellung 3.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_a}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+r} \right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$- 2 \mu_a \left( - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = - 2 \mu_a \left( \frac{r}{l} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+r} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right).$$

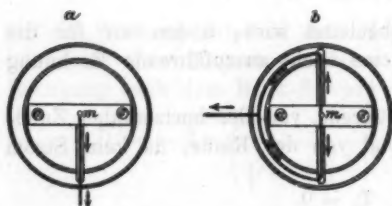


Fig. 15.

Für den Fall, dass die beiden Magnete eingesetzt sind, haben wir die beiden Stellungen *a* und *b* der Fig. 15 und folgende Formeln.

Bei Stellung *a*:

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung *b*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2(\mu_a - \mu_\beta) \frac{r}{l} + 2 \mu_a \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right) \\ & + 2 \mu_\beta \left( \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} \right) \\ & - \frac{2(\mu_a + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}}. \end{aligned}$$

Wenn  $\mu_a = \mu_\beta = \mu$ , so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2 \mu \left( \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right). \end{aligned}$$

Wenn  $r = 0$ , so wird

$$\mathfrak{D}_1 = 0,$$

was das direct gefundene Resultat bestätigt, dass bei einem centrisch eingesetzten Magnet die Einwirkung der äusseren Zuleitungen gleich Null ist.

Diese Resultate der Rechnung wurden durch die folgenden Versuche bestätigt:

Bei der Stellung *a* ist die Wirkung der äusseren Zuleitung Null. Das Drehungsmoment entspricht in diesem Fall nur der Wirkung der inneren Kräfte; es wurde vermittelst Bifilaraufhängung bestimmt zu

$$D_1 = 551,$$

während aus der theoretischen Formel

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}$$

bei Einsetzung der Werte  $\mu_\alpha = 194$ ,  $\mu_\beta = 179$ ,  $r = 3$ ,  $R = 5,45$  und  $l = 6,25$  sich ergibt:

$$D_1 = 529;$$

auch hier ist, wie das zu erwarten war, das für den ideellen Magnet berechnete Drehungsmoment etwas kleiner als das für den wirklichen Magnet beobachtete.

Es wurde nun die horizontale Zuleitung in der Rinne um  $90^\circ$  verschoben, wodurch das Schema *b* entstand; nun kam, wie die Rechnung zeigte, zu dem obigen Drehungsmoment der inneren Kräfte noch die Einwirkung der äusseren Zuleitung und der Rinne. Es zeigte sich das auch deutlich bei der Beobachtung, indem das Drehungsmoment auf 716 stieg. Wir dürfen also annehmen, dass der Unterschied der beiden beobachteten Drehungsmomente, somit die Zahl 165, der von uns berechneten Einwirkung  $\mathfrak{D}_1$  der äusseren Zuleitung und der Rinne entspricht. Wenn wir in unserer Formel die obigen durch Beobachtung gefundenen Werte einführen, so finden wir

$$\mathfrak{D}_1 = 130.$$

Auch hier erklärt sich der Unterschied des beobachteten und des berechneten  $\mathfrak{D}_1$  aus den verschiedenen Bedingungen des wirklichen und des ideellen Magnets.

Bei einem zweiten Versuche wurde der Strom auf der Seite des schwächeren Magnets  $\mu_p$  in die Rinne geführt, das Drehungsmoment war dann, wie es auch die Theorie verlangt, etwas schwächer.

Aus dem Vergleich des Apparates mit *einem* centrischen Magnet und des Apparates mit *zwei* excentrischen Magneten geht hervor, dass in dem ersten Falle die Drehung nur durch innere Kräfte erzeugt wird, während im zweiten Falle noch die Einwirkung der äusseren, von der fest bleibenden Zuleitung herrührenden Kräfte dazukommt; die letztere ist nicht constant, sie hängt ab von der Stellung zum Magnet und variirt in jedem Quadranten von Null zu dem von uns berechneten und beobachteten Maximalwerte.

Im Folgenden stellen wir die wesentlichen Resultate unserer Untersuchung zusammen.

1. *Die sämtlichen Erscheinungen, die unser Rotationsapparat, und zwar sowohl bei Anwendung von einem centrisch eingesetzten, als bei Anwendung von einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten zeigte, entsprechen unter allen Umständen der Reversibilität zwischen Drehung durch den Strom und Induction durch die Drehung.*

2. *Die aus dem Biot-Savart'schen Gesetze berechneten Drehungsmomente und die daraus mit Hülfe des Satzes der Erhaltung der Energie abgeleiteten inducirten elektromotorischen Kräfte stimmen bei den sehr mannigfach abgeänderten Versuchen mit den beobachteten Grössen zu voller Befriedigung überein; man ist somit zu der Annahme berechtigt, dass diese Rotationen und Inductionerscheinungen sich vollkommen aus der bekannten, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze wirkenden elektromagnetischen Kraft erklären lassen.*

3. *Die Abweichungen in den numerischen Werten der beobachteten und berechneten Grössen lassen sich, soweit sie nicht den durch verschiedene Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können, aus dem Unterschiede des ideellen und wirklichen Magnets erklären. Es können deshalb die mit einem drehbaren Magnet angestellten Bestimmungen des durch einen durchgeleiteten Strom erzeugten Drehungsmomentes oder des durch Drehung erzeugten Inductionsstromes dazu dienen, das Kraft-*

feld eines wirklichen Magnets und die Verteilung des freien Magnetismus im Magnet zu studiren.

4. Der von Hrn. Lecher erwähnte Fundamentalversuch ist also für uns ein Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes und verdient keineswegs die Bezeichnung eines theoretischen und experimentellen Trugschlusses.

### III. Der König'sche Rotationsapparat.<sup>1)</sup>

Hr. Lecher bespricht auch den Rotationsapparat der Herren Fleischmann und Walter König.<sup>2)</sup> Es besteht derselbe, wie Fig. 16 andeutet, aus einem vom Strom durchflossenen Hohlcyylinder vom Radius  $R$  und einer Anzahl Hufeisenmagnete, die so miteinander verbunden sind, dass die Nordpole ausserhalb des Cylinders auf einem Kreise liegen und die Südpole in der Axe des Cylinders vereinigt sind. Der Hohlcyylinder und das Magnetbündel sind um die gleiche Axe drehbar. Wenn Hr. Lecher diesen Apparat als eine neue Form des alten Barlow'schen Rädchens bezeichnet, so habe ich insofern nichts dagegen, als bei demselben die Drehung nur durch die von aussen einwirkenden Kräfte zu stande kommt, nicht aber wie bei den von Hrn. Lecher und von mir untersuchten Rotationsapparaten auch durch die inneren Kräfte, die zwischen den fest miteinander verbundenen Teilen des drehbaren Körpers wirken. Immerhin hat der König'sche Apparat den sehr wichtigen Vorteil, dass man damit die vier Fälle zeigen kann: 1. nur der Magnet ist drehbar; 2. nur der Strom ist drehbar; 3. Magnet und Strom sind jeder für



Fig. 16.

1) Diese Abhandlung war schon druckfertig, als ich das Heft Nr. 3 der Annalen der Physik, Bd. 2 erhielt, wo Hr. König auf p. 854 die Abhandlung des Hrn. Lecher bespricht; es gereicht mir zur grossen Befriedigung, zu sehen, dass Hr. König und ich in der Auffassung der verschiedenen Rotationsapparate vollkommen einig gehen.

2) L. Fleischmann, Zeitschr. f. physik. und chem. Unterricht 8. p. 361. 1895; W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.



sich drehbar; 4. Magnet und Strom sind fest miteinander verbunden drehbar; während beim Barlow'schen Rad nur der Strom durch das magnetische Feld sich bewegt.

Die Theorie dieses hübschen Demonstrationsapparates lässt sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze in folgender Weise ableiten:

In der Fig. 17 bedeutet der Kreis den Durchschnitt des vom Strom durchflossenen Cylinders, den wir uns nach oben und unten ins Unendliche verlängert denken; der Sinn der Bewegung des Stromes gehe von unten nach oben, und seine Stärke sei  $i$ . Die Rechnung ergibt, dass, wenn ein Pol von der Stärke  $+\mu$  in der centralen Axe  $C$  sich befindet, die Resultante der Wirkung des Stromes auf diesen Pol gleich Null ist. Liegt jedoch  $\mu$  in einem äusseren Punkte  $A$  in der Distanz  $d$  von der Centralaxe, so wird  $\mu$  senkrecht zu der Ebene, welche durch die Axe und den Pol geht, in der Richtung des Pfeiles gerade so getrieben, wie wenn der ganze Strom in der Centralaxe verlaufen würde, also mit einer Kraft  $2i\mu/d$ .

Um andererseits die Wirkung eines Poles in der Centralaxe  $C$  auf den Strom im Cylinder zu erhalten, denken wir uns den letzteren in lauter senkrechte Partialströme von der Stärke  $di$  zerlegt. Auf jeden wirkt der Strom tangential zum Cylinder mit einer Kraft  $2di\mu/R$ , und das giebt für die Gesamtwirkung das Drehungsmoment  $2i\mu$ . Befindet sich der Pol in  $A$ , so wirkt er auf den vom Strom durchflossenen Cylinder senkrecht zu der Ebene, in der Richtung des Pfeiles mit der Kraft  $2i\mu/d$ .

Wenn wir nun annehmen, dass alle Südpole von der Stärke  $-\mu$  in dem Centrum  $C$ , alle Nordpole von der Stärke  $+\mu$  auf einem Kreis vom Radius  $d$  sich befinden, wie das in Fig. 16 angedeutet ist, so haben wir folgendes:

1. Der vom Strom durchflossene Cylinder steht fest und die Magnete sind drehbar.

Die Wirkung des Stromes auf sämtliche Südpole ist Null; auf jeden Nordpol wirkt der Strom tangential zum Kreis vom Radius  $d$  mit einer Kraft  $2i\mu/d$ ; somit ist das Dre-



Fig. 17.



hungsmoment, mit welchem der Strom auf die drehbaren Magnete wirkt:

$$2i \Sigma \mu.$$

2. Die Magnete stehen fest und der vom Strom durchflossene Cylinder ist drehbar. Je zwei einander gegenüberstehende Nordpole wirken auf den vom Strom durchflossenen Cylinder mit gleich grossen in entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräften; die Gesamtwirkung aller Nordpole auf den beweglichen Cylinder ist also Null. Die in *C* vereinigten Südpole hingegen wirken auf den Cylinder mit einem Drehungsmoment

$$-2i \Sigma \mu.$$

3. Die Magnete und der Strom sind beide für sich drehbar. Auf die Magnete wirkt ein positives und auf den vom Strom durchflossenen Cylinder ein gleiches negatives Drehungsmoment; es drehen sich also beide in entgegengesetztem Sinne.

4. Die Magnete und der vom Strom durchflossene Cylinder sind fest miteinander verbunden und nur zusammen drehbar. Auf das feste System wirken zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Drehungsmomente; die Gesamtwirkung der inneren Kräfte ist also Null.

Diese aus der Theorie abgeleiteten Resultate stimmen vollkommen mit den Versuchen der Herren Fleischmann und König.

#### IV. Das Biot-Savart'sche Gesetz.

In einer gemeinsam ausgeführten Arbeit haben Biot und Savart durch Versuche festgestellt, dass ein unendlich langer geradliniger Strom auf einen Magnetpol mit einer Kraft wirkt, die der Stromstärke und der Polstärke proportional und der Distanz umgekehrt proportional ist. Für die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol oder ein magnetisches Element folgerte daraus Laplace, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung, und infolge weiterer Versuche zeigte Biot, dass sie proportional ist dem Sinus des Winkels, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht. Dies führte zu dem Ausdruck  $i \mu \sin \vartheta ds / \rho^2$ , welcher bald mit dem Namen der

Biot-Savart'schen, bald mit dem Namen der Laplace'schen Formel bezeichnet wird.<sup>1)</sup>

Wie der folgende Gedankengang zeigen soll, führen Erfahrung und Logik notwendigerweise dazu, dass nur dieses Gesetz die Kraftbeziehung zwischen einem vom Strom  $i$  durchflossenen Leiterelement  $ds$  und einer Magnetismusrmenge  $\mu$  darstellen kann.

Die Wirkung des Stromelementes  $ds$  auf das magnetische Element  $\mu$  lässt sich zerlegen in die Wirkung von  $ds \sin \vartheta$  und  $ds \cos \vartheta$ . Zu dieser Zerlegung ist man einerseits berechtigt aus der Vorstellung der fließenden Elektrizität, auf die sich wie auf eine strömende Flüssigkeit der Satz des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten anwenden lässt, andererseits durch die Versuche, welche bekanntlich schon Ampère angestellt hat.<sup>2)</sup>

Was die Wirkung von  $ds \cos \vartheta$  auf  $\mu$  betrifft, so liegt hier  $\mu$  in der Richtung des Stromelementes. Bestimmt ist in diesem Fall nur eine Richtung, nämlich die der Verbindungslinie, und es kann somit nur in dieser eine Kraftwirkung stattfinden. Es wäre denkbar, dass das Element  $\mu$  abgestossen wird, wenn der Strom gegen dasselbe gerichtet ist, und angezogen, wenn der Strom von ihm herkommt; oder auch umgekehrt. Dass jedoch eine solche Wirkung nicht stattfindet, zeigt bekanntlich die Erfahrung. Zum Ueberfluss habe ich noch den Versuch angestellt, der in Fig. 18 angedeutet ist; wenn der gegen den Pol eines sehr leicht beweglichen längeren Magnets gerichtete Strom ca. 20 Ampère betrug, so war bei Stromschluss, Stromunterbrechung oder Stromumkehrung nicht die geringste Wirkung zu beobachten.

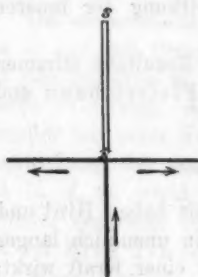


Fig. 18.

Die andere Componente  $ds \sin \vartheta$  steht senkrecht auf der Verbindungslinie von  $ds$  und  $\mu$ ; in diesem Falle sind drei zu

1) J. B. Biot et F. Savart, Collection de mémoires relatifs à la physique publiés par la société française de physique 2. p. 80. 1835.

2) A. M. Ampère, Collection de mémoires 3. p. 12. 1837.

einander senkrechte Richtungen bestimmt, nämlich die Verbindungslinie, die Parallele zum Stromelement und die Normale zu der Ebene ( $ds, \mu$ ).

In der Richtung der Verbindungslinie kann aus logischen Gründen keine Kraft wirken, da der Sinn, in welchem die Kraft wirken soll, das heisst der Entscheid, ob  $\mu$  in der Richtung der Verbindungslinie angezogen oder abgestossen wird, nicht aus der gegenseitigen Lage von  $ds \sin \vartheta$  und  $\mu$  bestimmt werden kann.

Eine Kraftwirkung nach der zum Stromelement  $ds \sin \vartheta$  Parallelen wäre zwar logisch denkbar; allein die Versuche haben von einer solchen Kraftwirkung noch nie etwas nachweisen lassen.

Es bleibt somit für die Wirkung zwischen  $ds$  und  $\mu$  nichts möglich, als die durch  $ds \sin \vartheta$  bewirkte Kraftwirkung in der Richtung der Normalen zur Ebene ( $ds, \mu$ ). Diese muss aus logischen Gründen proportional sein der Stromstärke  $i$  und der Magnetismusmenge  $\mu$ , da ja diese Grössen aus der Intensität der Kraftwirkung definirt sind, und ferner proportional der Länge  $ds \sin \vartheta$ , da die Wirkung die Summe ist der Wirkungen der einzelnen Teile, in die wir dieselbe zerlegen können. Da ferner die von Biot und Savart angestellten Versuche und die Rechnung von Laplace ergeben haben, dass die Wirkung dem Quadrate der Entfernung  $\varrho$  umgekehrt proportional ist, was auch mit der von Coulomb ermittelten Abnahme der Fernwirkung übereinstimmt, so kann in der Richtung der Normalen nur eine Kraft wirken von der Grösse  $i \mu \sin \vartheta ds / \varrho^2$ , die infolge der obigen Betrachtung als die einzig mögliche Kraftwirkung übrig bleibt. Dies ist aber nichts anderes als das Biot-Savart'sche Gesetz.

Der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, muss durch die Erfahrung bestimmt werden; er geht nach der Ampère'schen Regel, das heisst so, dass der Nordpol nach links getrieben wird, wenn man mit dem Strome schwimmt und den Pol ansieht.

Es handelt sich nun noch darum, die reciproke Wirkung von  $\mu$  auf  $ds$  zu bestimmen.

Bekanntlich lautet der dritte von Newton in seinen Prinzipien aufgestellte Grundsatz:

Actioni contrariam semper aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Bei den zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kräften folgt aus dem obigen Grundsatz, dass, wenn  $A$  festgehalten wird,  $B$  nach  $A$  hin- oder von  $A$  weggetrieben wird, je nachdem wir eine anziehende oder eine abstossende Kraft haben; dass ebenso, wenn  $B$  festgehalten wird, mit der gleichen Kraft  $A$  nach  $B$  hin- oder von  $B$  weggetrieben wird; sind die beiden Punkte frei beweglich, so werden sie beiderseits mit der gleichen Kraft zu einander oder voneinander getrieben; sind die beiden Punkte fest miteinander verbunden, so ist Annäherung oder Entfernung unmöglich, also ist die Wirkung der Kraft Null.

Im vorliegenden Falle des Biot-Savart'schen Gesetzes haben wir nicht die obige Bedingung einer in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kraft; die Anwendung des Newton'schen Grundsatzes muss sich deshalb auch etwas anders gestalten. Wenn  $ds$  fest ist, wirkt auf  $\mu$  eine zur Ebene  $(ds, \mu)$  senkrecht wirkende Kraft, was einem statischen Moment entspricht, dessen Axe in der Ebene  $(ds, \mu)$  durch  $ds$  geht und senkrecht auf der Verbindungslinie steht; es wird also durch dieses Moment  $\mu$  um das feste  $ds$  herumgetrieben. Wenn man nun den Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung anwenden will, so muss man in Betracht ziehen, dass an die Stelle der Kraft, die eine lineare Beschleunigung erteilt, in unserem Falle ein Moment tritt, das eine Winkelbeschleunigung liefert. Im vorigen Falle schlossen wir auf eine gleiche Kraft, mit der  $B$  nach  $A$  oder  $A$  nach  $B$  getrieben wird, je nachdem  $A$  oder  $B$  fest ist; in unserem Falle schliessen wir ganz analog auf ein gleiches Moment, mit dem  $\mu$  um  $ds$  oder  $ds$  um  $\mu$  getrieben wird, je nachdem  $ds$  oder  $\mu$  fest ist. Wir sind also berechtigt anzunehmen, dass, wenn  $\mu$  festgehalten wird, das gleiche aus der gegenseitigen Wirkung entstehende Moment die Bewegung von  $ds$  um  $\mu$  bewirkt; oder dass das Element  $ds$  mit der Kraft  $i\mu \sin \vartheta ds/\rho^2$  senkrecht zu der Ebene  $(ds, \mu)$  oder senkrecht zu der durch Stromrichtung und Feldrichtung gehenden Ebene getrieben wird. Der Sinn der Bewegung wird in diesem

Fälle durch die Fleming'sche Regel bestimmt, nach welcher der Sinn der Bewegung des Elementes zum Sinn der Feldrichtung und der Stromrichtung die gleiche Stellung hat wie der Daumen zum Zeigefinger und zum Mittelfinger an der linken Hand.

Sind  $ds$  und  $\mu$  fest miteinander verbunden, so heben sich in diesem Falle die Kräfte nicht auf, sondern es entsteht ein Kräftepaar, das dem Körper eine Drehung erteilt. Wie schon Ampère<sup>1)</sup> bemerkt hat, widerspricht es den ersten Grundsätzen der Dynamik, dass aus der gegenseitigen Kraftwirkung verschiedener Teile des gleichen festen Körpers eine Bewegung entstehe. Allein dieser Widerspruch fällt, wie wir oben gezeigt haben, weg, sobald man in Betracht zieht, dass die Elektrizität an fest bleibenden Punkten zu- und abgeleitet wird, und dass die bei der Bewegung des Leiters durch das magnetische Feld erzeugte Induction den Widerspruch mit dem Satze von der Erhaltung der Energie beseitigt. So bildet die erst mehrere Jahre nach den Arbeiten von Oersted, Biot und Ampère durch Faraday entdeckte Induction eine notwendige Ergänzung zu dem Gesetze der elektromagnetischen Wirkung.

Wenn man der aus dem Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gefolgerten Reciprocität Ausdruck geben will, so kann man unter Voraussetzung des Coulomb'schen Gesetzes für die Wirkung zweier magnetischer Elemente aufeinander, die durch das Biot-Savart'sche Gesetz gegebenen Beziehungen zwischen dem Stromelement  $ds$  und dem magnetischen Element  $\mu$  noch deutlicher durch die folgenden zwei Gesetze ausdrücken:

1. Ein von dem Strom  $i$  durchflossenes Leiterelement  $ds$  erzeugt in einem beliebigen Punkte des Raumes, der um  $\rho$  von  $ds$  absteht, ein Kraftfeld von der Stärke  $i \sin \vartheta ds / \rho^2$ , dessen Richtung senkrecht steht auf der Ebene  $(ds, \mu)$  und dessen Sinn bestimmt wird durch die Ampère'sche Regel.

2. In einem magnetischen Feld von der Stärke  $f$  wird ein vom Strom  $i$  durchflossenes Leiterelement  $ds$  getrieben mit einer Kraft  $f i ds$ , deren Richtung senkrecht steht zu der durch Feld-

1) A. M. Ampère, Collect. de mém. 3. p. 226. 1887.

richtung und  $ds$  gehenden Ebene, und deren Sinn durch die Fleming'sche Regel bestimmt wird.

#### V. Die Formeln von Ampère und Grassmann.

Bekanntlich hat Ampère die Kraft, mit welcher zwei Stromelemente aufeinander wirken, als elektrodynamische Action bezeichnet und das Gesetz für dieselbe aufgestellt. Er ging dabei von der Voraussetzung aus, dass diese Kraftwirkung gerade so gut wie die zweier Massen, zweier Magnetismuselementen oder zweier Elektrizitätsmengen in der Richtung der Verbindungslinie stattfinden müsse, und gelangte durch die aus einigen Versuchen gezogenen Folgerungen auf höchst genialem Wege zu der bekannten Formel, welche bei Zugrundelegung der (C. G. S.)-Einheiten folgendermaassen lautet:

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 (-2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\varrho^3},$$

dabei bedeuten  $i_1$  und  $i_2$  die beiderseitigen Stromstärken in den Leiterelementen  $ds_1$  und  $ds_2$ ,  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Winkel, die  $ds_1$  und  $ds_2$  mit der Verbindungslinie  $\varrho$  bilden und  $\varphi$  den Neigungswinkel der Ebene ( $ds_1, \varrho$ ) zur Ebene ( $ds_2, \varrho$ ).

Man kann die Formel auch schreiben:

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 (-2 \cos \varepsilon + 3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\varrho^3},$$

wenn  $\varepsilon$  den Winkel bedeutet, den die Richtungen von  $ds_1$  und  $ds_2$  miteinander bilden.

Ferner zeigte Ampère, dass man einen Elementarmagnet in seiner Wirkung ersetzen kann durch einen unendlich kleinen Kreisstrom, dessen Ebene senkrecht steht zur Axe des Elementarmagnets, und für welchen das Product der Stromstärke mit der umflossenen Fläche gleich ist dem Momente des Elementarmagnets; dadurch konnten die magnetischen und elektromagnetischen Wirkungen aus der elektrodynamischen Kraft erklärt werden.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass die Drehungswirkungen, die nach unserer Ansicht durch innere, das heisst von den einzelnen Teilen des starren Körpers ausgehende Kräfte erzeugt werden, unmöglich aus der in der Verbindungslinie der Elemente wirkenden elektrodynamischen Kraft erklärt



werden können. Es existirt also hier ein Widerspruch zwischen dem Biot-Savart'schen Gesetze und der Ampère'schen Formel, der noch aufgeklärt werden muss.

Zu dem Satze, dass zwei Elemente nur in der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken können, wird man aus logischen Gründen gezwungen, wenn die Elemente Punkte sind, die weder Richtung noch Sinn haben, da in diesem Falle nur die Richtung bestimmt ist, welche durch die beiden Elemente geht. Es gilt dies für Massenpunkte, für magnetische Pole und für in einem Punkte concentrirte elektrische Mengen. Bei Stromelementen, wo beiderseits Richtung und Sinn der Elektricitätsbewegung gegeben sind, liegen die Verhältnisse anders. Ausser der Verbindungslinie sind auch andere Richtungen bestimmt, und die Logik verlangt nur, dass für beide Elemente Richtung und Sinn der Kraftwirkung aus den vorliegenden Grössen sicher und eindeutig bestimmt sind.

Wir verzichten also auf die Bedingung, dass die elektrodynamische Kraft in der Richtung der Verbindungslinie wirken müsse und leiten unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze in der folgenden einfachen Weise die Formel für die elektrodynamische Kraft ab.

Das Element  $ds_1$  bewirkt bei  $ds_2$  ein magnetisches Kraftfeld von der Stärke  $i_1 ds_1 \sin \vartheta_1 / \rho^2$ , dessen Richtung senkrecht steht zu der Ebene  $(ds_1, \rho)$ , und dessen Sinn durch die Ampère'sche Regel gegeben ist. Infolge dessen wird das Element  $ds_2$  mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_1 \sin \psi_2}{\rho^3}$$

in der Richtung getrieben, die normal steht zu der Ebene (Feldrichtung,  $ds_2$ ); der Sinn der Kraft ist durch die Fleming'sche Regel bestimmt.  $\psi_2$  ist der Winkel, den das Element  $ds_2$  mit der Feldrichtung am Orte von  $ds_2$  macht, und ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \varphi;$$

$ds_2 \sin \psi_2$  ist die Projection von  $ds_2$  auf die Ebene  $(ds_1, \rho)$ .

In ganz gleicher Weise wird das Element  $ds_1$  mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_1}{\rho^3}$$



senkrecht zu der Ebene (Feldrichtung,  $ds_1$ ) getrieben; auch hier ist der Sinn der Kraftwirkung durch die Fleming'sche Regel bestimmt.  $\psi_1$  ist der Winkel, den das Element  $ds_1$  mit der Feldrichtung am Orte von  $ds_1$  macht.

Der hier unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitete Ausdruck stimmt genau überein mit der Formel, die auf ganz anderem Wege schon im Jahre 1845 Grassmann und im Jahre 1877 unabhängig davon wieder auf anderem Wege Clausius abgeleitet hat.<sup>1)</sup>

Wenn  $\varphi = 0$  und  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 90^\circ$ , so giebt die Grassmann'sche Formel:

Wirkung von  $ds_1$  auf  $ds_2$ :  $i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \varrho^2$  nach  $ds_1$  hin,

Wirkung von  $ds_2$  auf  $ds_1$ :  $i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \varrho^2$  nach  $ds_2$  hin,

folglich

Anziehung zwischen  $ds_1$  und  $ds_2$ :  $-2i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \varrho^2$ ;

setzen wir  $\vartheta_1 = 90^\circ$  und  $\vartheta_2 = -90^\circ$ , so bekommen wir:

Abstossung zwischen  $ds_1$  und  $ds_2$ :  $+2i_1 i_2 ds_1 ds_2 / \varrho^2$ ;

für die Wirkung zweier Stromelemente, die in *einer* Ebene liegen und auf der Verbindungslinie senkrecht stehen, geben also die Ampère'sche und die Grassmann'sche Formel gleiche Werte.

Die Wirkung eines *geschlossenen Stromes* auf einen Elementarmagnet ist sowohl nach der Ampère'schen als nach der Grassmann'schen Formel stets gleich der Wirkung auf einen unendlich kleinen Kreisstrom.<sup>2)</sup> Wenn man jedoch die Wirkung eines *Stromelementes* betrachtet, so macht sich der folgende Unterschied geltend.

Wenn wir ein Stromelement und einen Elementarmagnet haben, die beide in *einer* Ebene liegen und zu der Verbindungslinie senkrecht stehen, so wirkt nach dem Biot-Savart'schen Gesetze das Stromelement auf den Elementarmagnet mit einem Drehungsmomente  $iMds/\varrho^2$ , wenn  $M$  das Moment des Elementarmagnets bedeutet.

1) H. Grassmann, Pogg. Ann. 64. p. 1. 1845; R. Clausius, Crelle's Journ. 82. p. 85. 1877; H. Grassmann, l. c. 83. p. 57. 1877; R. Clausius, l. c. 83. p. 262. 1877.

2) F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von K. VonderMühl. p. 107. Leipzig 1884.

Die Wirkung des Stromelementes auf einen den Elementarmagnet ersetzenden Kreisstrom ist nach der Ampère'schen Formel Null, da für alle Elemente des Kreisstromes  $\vartheta_1$  und  $\varphi$  gleich  $90^\circ$  ist, nach der Grassmann'schen Formel  $i F i_1 ds / \rho^3$ , wenn  $F$  die umflossene Fläche und  $i_1$  die Intensität des Kreisstromes bedeutet.

Die Ampère'sche Theorie der Ersetzung des Elementarmagnets durch den Kreisstrom gilt also bei Anwendung der Grassmann'schen Formel auch für die Wirkung zwischen Stromelement und Elementarmagnet. Es kann ferner ganz allgemein gezeigt werden, dass bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes einerseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom genau das gleiche magnetische Feld im Raume erzeugen, und dass andererseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom im gegebenen magnetischen Feld von dem gleichen Kräftepaare gedreht werden, dass somit in allen denkbaren Fällen Elementarmagnet und unendlich kleiner Kreisstrom sich ersetzen können.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich also:

*Auch die Rotationen, welche wir als Wirkung der inneren Kräfte auffassen, wenn ein elektrischer Strom durch eine starre um eine Aze drehbare Verbindung von Magneten und Leitern hindurchgetrieben wird, lassen sich nach der Ampère'schen Theorie aus den zwischen den einzelnen Teilen des Körpers wirkenden elektrodynamischen Kräften erklären, wenn man die Ampère'sche Formel durch die Grassmann'sche ersetzt.*

Es entsteht nun noch die Frage, ob die von uns als Wirkung der inneren Kräfte aufgefassten Rotationen nicht auch aus der von Ampère für die elektrodynamische Kraft aufgestellten Formel erklärt werden können.

Dass die inneren Kräfte die Drehung nicht erklären können, wenn die Stromelemente nach der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken, ist selbstverständlich; es bleibt also nur die Möglichkeit, die Rotation aus der Wirkung des festen Zuleitungsdrahtes zu erklären.

Wir halten uns an den Apparat Fig. 5 (p. 246). Dass hier der feste Zuleitungsdraht, der horizontal von der Distanz  $R$  bis ins Unendliche geht, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze keine Drehung des Magnets um seine verticale

Axe bewirken kann, haben wir weiter oben gesehen. Ebenso leicht ist zu beweisen, dass der feste Zuleitungsdraht bei Anwendung der Grassmann'schen Formel kein Drehungsmoment um die verticale Axe liefern kann, wenn wir den Magnet durch ein Solenoid ersetzen, das heisst durch eine Walze von der Länge  $2l$  und dem im Vergleich zu  $l$  und  $R$  kleinen Radius  $r$ , welche von einem der Bedingung  $2l\mu = \pi i_1 r^2$  entsprechenden Strome  $i_1$  umflossen ist. Nach Grassmann wirkt nämlich die von  $ds_2$  oder einem Elemente des Zuleitungsdrahtes ausgehende elektrodynamische Kraft stets senkrecht auf die Ebene (Feldrichtung,  $ds_1$ ) und also auch senkrecht auf  $ds_1$ ; die Componente in der Richtung von  $ds_1$ , das heisst in der zum Drehen um die verticale Axe notwendigen Richtung des Solenoidumfanges, ist also Null.

Anders verhält sich die Sache, wenn man von der Ampère'schen Formel ausgeht; die Ausführung dieser nicht schwierigen Rechnung ergibt für das Drehungsmoment, mit welchem ein äusserer horizontaler aus dem Unendlichen bis zur Rinne vom Radius  $R$  führender Zuleitungsdraht auf das Solenoid wirkt, den Wert

$$-2\mu i_2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

wir haben also für das von äusseren Kräften herrührende Drehungsmoment bei der Stromstärke eins:

$$\mathfrak{D}_1 = -2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

also genau den gleichen Wert, den wir bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes oder der Grassmann'schen Formel für das aus den inneren Kräften sich ergebende Drehungsmoment gefunden haben.

Es ergibt sich also für die Beziehungen zwischen den Formeln von Biot-Savart, Ampère und Grassmann folgendes:

Die Drehung eines um seine Axe drehbaren Magnets nach dem Schema der Fig. 5 kann einerseits aus dem Biot-Savart'schen Gesetz oder aus der Grassmann'schen Formel, andererseits aber auch aus der Ampère'schen Formel abgeleitet werden.

Bei der Erklärung nach Biot-Savart oder Grassmann wird die Wirkung erzeugt durch die *inneren* Kräfte, das heisst durch solche, die zwischen Teilen des drehbaren starren Körpers wirken, während die Einwirkung des äusseren festen zur Rinne führenden horizontalen Drahtes Null ist.

Bei der Erklärung aus der Ampère'schen Formel heben sich die inneren Kräfte in ihrer Wirkung auf, während die Einwirkung des festen *äusseren* Drahtes das Drehungsmoment liefert.

In beiden Fällen wird der Widerspruch mit dem Satze der Erhaltung der Energie nur durch Herbeiziehung der Induction aufgehoben, da ohne dieselbe das Drehungsmoment bei Beseitigung des Reibungswiderstandes eine bis ins Unendliche zunehmende Winkelgeschwindigkeit erzeugen würde.

Bei Annahme der Grassmann'schen Formel gestaltet sich alles bei der Erklärung der Rotation und der Induction viel einfacher und übersichtlicher, weil die *gleiche* Auffassung für die Ableitung der Erscheinung aus der *elektromagnetischen* und aus der *elektrodynamischen* Kraft gilt, und weil auch die Vorstellung der magnetischen Kraftlinien bei der Erklärung verwendbar ist, indem das gleiche magnetische Kraftfeld aus dem Biot-Savart'schen Gesetze und aus der Grassmann'schen Formel sich ableiten lässt.

Bei Anwendung der Ampère'schen Formel gelangt man zwar auch zum richtigen durch die Erfahrung bestätigten Resultat; aber es bleibt der Widerspruch, dass der gleiche Wert des Drehungsmomentes, welcher *elektromagnetisch* aus der Wirkung der *inneren* Kräfte sich ergibt, *elektrodynamisch* der Wirkung der *äusseren* Kräfte zugeschrieben werden muss.

Wir fügen noch die historische Notiz bei, dass Ampère, der zuerst mit einem unten mit Platin beschwerten, in Quecksilber senkrecht schwimmenden Magnet den Versuch nach dem Schema der Fig. 5 angestellt hat, die drehende Wirkung von der festen Zuleitung ausgehen liess und annahm, dass die inneren Kräfte sich aufheben.<sup>1)</sup> Für die Grösse des Drehungsmomentes gab er schon den richtigen Wert.<sup>2)</sup>

1) A. M. Ampère, Collection de mémoires 2. p. 387. 1885; 3. p. 258. 1887.

2) l. c. 3. p. 262. 1887.

Als diese Arbeit schon abgeschlossen war, fand ich, dass Hr. E. Wiechert<sup>1)</sup> schon vor mir die Grassmann'sche Formel unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitet hat.

Schliesslich möchte ich noch den Dank aussprechen an meinen Collegen, Hrn. Prof. VonderMühl, der mich auf manche wichtige mathematische Beziehungen und Sätze aufmerksam gemacht, und an Hrn. Dr. H. Veillon, der bei der Ausführung und Berechnung der Versuche mich wesentlich unterstützt hat.

---

1) E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik p. 25, in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal. Leipzig 1899.

(Eingegangen 5. November 1900.)

## 2. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers; von F. Paschen.

(Hierzu Taf. IX.)

Nach dem Ergebnis meiner früheren Versuche über die Spectren fester Körper<sup>1)</sup>, dass das Spectralgesetz des Hrn. W. Wien<sup>2)</sup> wohl gültig sein könnte, verbesserte ich alle meine experimentellen Hilfsmittel und begann neue Versuche zur Prüfung dieses Gesetzes unter möglichster Vermeidung der Unvollkommenheiten, welche meinen in den Jahren 1892 bis 1894 angestellten Versuchen natürlicherweise anhafteten. Die bereits veröffentlichten Versuche über die Strahlung von Hohlräumen und ähnlichen Anordnungen, welche die Strahlung eines schwarzen Körpers aussenden, ergaben folgende Resultate:

Hr. Wanner und ich<sup>3)</sup> untersuchten mit dem Spectralphotometer isochromatische Linien sichtbarer Wellenlängen und fanden hier die völlige Gültigkeit des Wien'schen Gesetzes. Hr. Wanner<sup>4)</sup> hat diese Messungen noch weiter verfolgt und gefunden, dass dies Gesetz im sichtbaren Spectralgebiete bis zur Temperatur des Kraters der Bogenlampe (circa 4000°) nahe gültig sein müsse.

Inzwischen hatte ich Versuche gemacht über die Energiespectren<sup>5)</sup> bei niederen Temperaturen (100° C. bis 450° C.) und fand auch hier Wien's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler gültig.

1) F. Paschen, Nachrichten Ges. d. Wissensch. Göttingen 1895. p. 294—305; Astrophysikal. Journ. 2. p. 202. 1895; Wied. Ann. 58. p. 455. 1898; 60. p. 662. 1897.

2) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

3) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899.

4) H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

5) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405. 1899.



Auch für höhere Temperaturen und kleinere Wellenlängen des ultraroten Gebietes hatte ich schon vorher die sehr genaue Gültigkeit von Wien's Gesetz erkannt. Bei höheren Temperaturen und längeren Wellenlängen dagegen stellten sich grössere Abweichungen ein, deren Grund ich in irgend einer Fehlerquelle suchen zu müssen glaubte. Nach vielen Versuchen gelang es mir, Hohlräume anzufertigen, deren Strahlung bei langen Wellen und hohen Temperaturen nur mehr geringe Abweichungen von Wien's Gesetz ergaben<sup>1)</sup>, sodass ich glaubte, das Gesetz müsse gelten, und wenn man es nicht fände, läge es an der unvollkommenen Realisirung der Strahlung. Noch andere Gründe bewogen mich zu dieser Annahme, von denen einer Anm. 3 angegeben ist.

Es ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung, dies durch neue Versuche zu widerlegen und damit einen Teil meiner früheren Veröffentlichung über höhere Temperaturen richtig zu stellen.

In letzter Zeit haben die Herren Lummer und Pringsheim denselben Gegenstand bearbeitet<sup>2)</sup> und in allen ihren Veröffentlichungen betont, dass sie Wien's Gesetz besonders bei hohen Temperaturen und grossen Wellenlängen nicht gültig finden könnten.<sup>3)</sup> Ich glaube, dass meine neuen Versuche geeignet

1) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 959. 1899.

2) O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 23 u. 215. 1899; 2. p. 163. 1900.

3) Die Versuche der Herren Lummer und Pringsheim ergaben für keinen Bereich der Temperaturen und Wellenlängen einen völligen Anschluss an Wien's Gesetz, sondern liessen sich durch eine von Hrn. Thiessen angegebene Formel (Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900) darstellen, welche für kleine Werte von  $\lambda T$  einen so erheblich anderen Verlauf hat als Wien's Formel, dass ich infolge dieses Widerspruches mit meinen Beobachtungen auch die Ueberzeugung von der Richtigkeit ihrer Resultate bei grossen Werten von  $\lambda T$  nicht gewann, obwohl dieselben mit den von mir schon im Anfange gefundenen Abweichungen von Wien's Gesetz qualitativ in Uebereinstimmung waren und obwohl für das Gebiet der langen Wellen die Anordnung von Lummer und Pringsheim vor der meinigen den Vorteil der Beseitigung der Wasserdampf-Absorptionen hatte. Dass die Herren Lummer und Pringsheim Wien's Gesetz nirgends genau gültig fanden, rührt zum Teil daher, weil sie nicht so tiefe Temperaturen und so



sind, den von ihnen für dieses Gebiet behaupteten Verlauf der Function zu bestätigen. Ebenso sind sie nicht im Widerspruche mit den Versuchen des Hrn. Beckmann<sup>1)</sup>, welche nach der Discussion des Hrn. H. Rubens<sup>2)</sup> die Ungültigkeit des Wien'schen Gesetzes für das Gebiet der von Hrn. Rubens entdeckten Reststrahlen des Fluorits beweisen. Diese Versuche sind in neuester Zeit durch die Herren Rubens und F. Kurlbaum<sup>3)</sup> bestätigt und auf höhere Temperaturen und die noch langwelligeren Reststrahlen des Steinsalzes ausgedehnt. Nach dieser bewundernswerten Arbeit kann kein Zweifel mehr sein, dass Wien's Gesetz hier ganz ungültig ist, und dass hier ein von Lord Rayleigh<sup>4)</sup> für lange Wellen aufgestelltes Gesetz viel eher gültig ist, welches sich vom Wien'schen Gesetze ganz erheblich unterscheidet und welches nach meinen Versuchen für kleinere Werte von  $\lambda T$  nicht gültig sein kann.

Gilt demnach in einem grossen Gebiete kleinerer Werte von  $\lambda T$  Wien's Gesetz mit grosser Annäherung, wie von Wanner und mir gefunden ist, treten bei grösseren Werten von  $\lambda T$  Abweichungen von diesem Gesetze auf, wie von den Herren Lummer und Pringsheim und Beckmann-Rubens zuerst betont ist, ungefähr entsprechend der Thiessen'schen Formel, gilt ferner bei grossen Werten von  $\lambda T$  ein Gesetz, wie dasjenige von Lord Rayleigh, wie von Rubens und Kurlbaum gefunden, so scheint es, als ob ein Strahlungs-

kleine Wellenlängen oder genauer so grosse Werte der Grösse  $1/\lambda T$  in den Bereich ihrer Untersuchung zogen wie ich, sodass sie nicht das nach der  $1/\lambda T$ -Scala grosse Gebiet übersehen konnten, in welchem ich Wien's Gesetz gültig fand. (Betreffs der Abweichungen, welche Lummer und Pringsheim auch bei kleineren Werten von  $\lambda T$  haben, verweise ich auf p. 297 Anm. 1.) Das Gebiet der Ungültigkeit von Wien's Gesetz erscheint auf dieser Scale klein gegenüber dem Gültigkeitsbereiche, wie aus dem Folgenden hervorgeht, sodass ich auch hierdurch bewogen wurde, die Abweichungen, welche ich hier erhielt, so lange als fehlerhaft anzusehen, bis ich zwingende Gründe fand, an ihre Richtigkeit zu glauben.

1) H. Beckmann, Tübinger Dissertation 1898.

2) H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 579. 1899.

3) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 25. Oct. 1900.

4) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 89. 1900. Lord Rayleigh vermutet die Gültigkeit dieses Gesetzes besonders für lange Wellen, obwohl nach meinen Versuchen für kleine Wellen Wien's Gesetz erfüllt sei.

gesetz die Wahrheit darstellt, welches Hr. M. Planck<sup>1)</sup> in neuester Zeit entdeckt hat, denn dieses beschreibt thatsächlich einen solchen Verlauf.

Dass dieses Gesetz in dem ganzen Gebiete meiner Messungen, sowie der photometrischen Versuche von Wanner und mir und Wanner allein innerhalb der Fehler gilt, möchte ich vor allem im Folgenden zeigen.

Man kann die allgemeinen Beziehungen als gültig ansehen, welche Hr. W. Wien<sup>2)</sup> einwandfrei unter der Voraussetzung des Stefan'schen Gesetzes abgeleitet hat. Wenn solche Punkte verschiedener Energiecurven als einander entsprechend bezeichnet werden, für welche  $\lambda T$  denselben Wert hat, so hat auch  $J T^{-5}$  für entsprechende Punkte denselben Wert, der aber zugleich mit dem Werte von  $\lambda \cdot T$  variirt, mit anderen Worten:

$$(1a) \quad J T^{-5} = f(\lambda T)$$

oder

$$(1b) \quad J \lambda^5 = F(\lambda T),$$

wo

$$(\lambda T)^5 f(\lambda T) = F(\lambda T)$$

ist. Die Function  $f(\lambda T)$  muss erfahrungsgemäss für sehr kleine und sehr grosse Werte der Variablen  $\lambda T$  verschwinden, also mindestens ein Maximum haben. Dieses Maximum wird also bei allen Energiecurven bei ein und demselben Wert  $\lambda T$  erreicht, oder:

$$(2) \quad \lambda_m \cdot T = C$$

und

$$(3) \quad J_m T^{-5} = C'$$

und für jede Energiecurve nach (1a)

$$(1c) \quad J/J_m = f(\lambda/\lambda_m).$$

Die Formeln (2), (3), (1c) sind früher von mir stets benutzt. Die Form (1a) rührt von Thiessen her.  $J$  ist die Intensität für die Wellenlänge  $\lambda$  und die Temperatur  $T$ .  $f(\lambda T)$  und  $F(\lambda T)$

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 202. 1900.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 6. p. 55. 1893.

sind unbekannte Functionen. Von diesen Relationen können die beiden (2) und (3) als durch alle Versuche bestätigt gelten, während diejenige (1c), welche etwas anderes aussagt als (2) und (3), aber nach Wien ebenso gelten muss, wie (2) und (3), durch meine Versuche immer gültig gefunden ist und auch, wie mir scheint, mit den Resultaten der Herren Lummer und Pringsheim bei langen Wellen im Einklange sein wird, wenn sie auch von ihnen nicht besonders geprüft wurde. Danach würde der ganze Verlauf des Strahlungsgesetzes bekannt sein, wenn man noch die Function  $f(\lambda T)$  oder  $F(\lambda T)$  kennen würde. Hierzu aber würde, wie bereits Hr. Wien betont hat, die Beobachtung einer einzigen Energiecurve ( $T = \text{const.}$   $J$  als Function von  $\lambda$  beobachtet und als Function von  $\lambda T$  dargestellt ergibt bis auf einen Proportionalitätsfactor  $f(\lambda T)$  oder einer einzigen isochromatischen Linie ( $\lambda = \text{const.}$   $J$  als Function von  $T$  beobachtet und als Function von  $\lambda \cdot T$  dargestellt ergibt bis auf einen Proportionalitätsfactor  $P(\lambda T)$ ) genügen.

Während meine früheren Versuche sich mit Energiecurven beschäftigten und die dem Wien'schen Gesetze entsprechende Form der Function  $f(\lambda T)$  ergaben, habe ich es nun vorgezogen, die Form isochromatischer Linien zu beobachten, da diese Beobachtung mit grösserer Sicherheit die Form der Function  $F(\lambda T)$  der Beziehung (1b) ergibt. Denn diese Messungen lassen sich so anordnen, dass alle die Fehler, welche bei der Beobachtung von Energiecurven zu befürchten sind, zum Verschwinden gebracht werden. Dahin gehören 1. die diffuse Strahlung, welche infolge der unvermeidlichen Mängel der optischen Theile des Spectralapparates entsteht (durch Trübungen des Prisma, blinde Stellen der Spiegel, Staubtheilchen, Beugung an den Kanten der Blenden); 2. die selectiven Eigenschaften dieser Theile und des Bolometerstreifens; 3. die selective Absorption der von der Strahlung durchsetzten Luft- und Prismenschicht. Da es nur auf die Form<sup>1)</sup> einer isochro-

1) Die Bemerkung der Herren Lummer und Pringsheim in ihrer letzten Mittheilung l. c. p. 175: „Alle Methoden, welche das Verhältniss der absoluten Energien für die verschiedenen Wellenlängen nicht zu bestimmen erlauben, so z. B. die photometrische Methode von Paschen-Wanner, die von Beckmann angewandte Rubens-Nicol'sche Methode der Reststrahlen können für sich allein nicht zur Bestätigung bez.

matischen Linie ankommt, um  $F(\lambda T)$  zu ermitteln, die Beziehung der isochromatischen Curven verschiedener  $\lambda$  zu einander

Aufstellung der Spectralgleichung dienen“ ist nicht mehr zutreffend, sobald man Wien's allgemeine Betrachtungen über die Verschiebung der Wellenlängen als theoretisch und experimentell erwiesen annimmt. Dann führt z. B. die von Wanner und mir gefundene Form der Isochromaten sichtbarer Wellenlängen eindeutig und notwendig zur Gültigkeit der Wien'schen Spectralgleichung im sichtbaren Spectralgebiete innerhalb des untersuchten Temperaturgebietes und in anderen Gebieten für die gleichen Werte  $\lambda T$ . Denn wir fanden, dass  $\log J = 8 - c_2 \log e / \lambda T$  die Form der sichtbaren Isochromaten ist, wo  $C_2 = 5 \times \lambda_m \cdot T$  war. Dies giebt unter Berücksichtigung von (1b) Wien's Gleichung, da 8 eine Function von  $\lambda$  ist, welche durch (1b) bestimmt wird. Andererseits entsprach die Form der Beckmann'schen Isochromaten nicht dem Wien'schen Gesetz, da hier  $C_2$  nicht gleich  $5 \times \lambda_m \cdot T$  war. Die weiteren Bemerkungen der Herren Lummer und Pringsheim zu diesen Arbeiten: „Das Bestreben der Herren Paschen und Wanner, den Wert von  $C$  so genau als nur irgend möglich zu bestimmen, war daher verfrüht, und die von ihnen angegebene Genauigkeit ist illusorisch“ (p. 172, ähnlich wiederholt auch in Lummer's Referat Paris 1900) scheint mir etwas verfrüht. Denn selbst wenn sie eigene Versuche über das Gebiet kleiner Werte der Variablen  $\lambda \cdot T$  gemacht hätten, welche nicht mit der Wien'schen Gleichung übereingestimmt hätten, so hatten doch unsere Versuche in diesem Gebiete einen sehr bemerkenswerten Anschluss an diese Gleichung ergeben, sodass die Möglichkeit doch wohl nicht ausgeschlossen gewesen wäre, dass unsere Versuche die richtigen sind, und dass die fragliche Gleichung in diesem Gebiete gilt. Nach den Resultaten unserer Arbeiten schien es uns nicht verfrüht, den Wert der Constanten genau zu bestimmen. (Wo man in einem Gebiete eine physikalische Constante findet, ist es wohl nie verfrüht, sie sehr genau zu bestimmen.) Ich halte auch jetzt diese Bestimmung und die Genauigkeit ihres Resultates noch nicht für illusorisch, da nach unseren Versuchen die Wien'sche Gleichung mit der von uns bestimmten Constanten innerhalb eines sehr grossen und gerade für die Optik sehr wichtigen Gebietes der Variablen  $\lambda \cdot T$  die Strahlungserscheinungen so genau beschreibt, wie wir die Messungen machen konnten. Daraus, dass in einem gewissen Gebiete grösserer Werte von  $\lambda \cdot T$  Wien's Gesetz ungültig gefunden wird, kann nicht mit Sicherheit geschlossen werden, dass es dann auch in einem ganz anderen Gebiete dieser Variablen ungültig sein müsse. Dieser Schluss leidet an demselben Fehler, wie derjenige, dass Wien's Gesetz auch für grosse Werte gelten müsse, wenn es für kleine genau gültig gefunden wird, welchen ich zu ziehen geneigt war. Das wahre Gesetz muss für das Gebiet unserer Versuche innerhalb der Fehler übereinstimmen mit Wien's Gesetz, für das Gebiet der von Lummer und Pringsheim zuerst behaupteten Abweichungen bei grösseren Wellen-

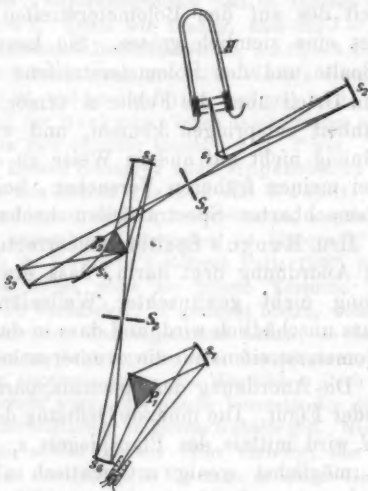
aber bereits durch Gesetz (1b) gegeben ist, so kann man den Strahlengang durch Einschalten beliebig vieler optischer Teile so anordnen, dass die untersuchte Strahlung einem sehr engen und reinen Spectralbezirk angehört. Dies bezweckt die folgende Versuchsanordnung.

In einem ersten Spectralapparate wird das Spectrum der Strahlung erzeugt. Ein schmaler Bezirk dieses Spectrums tritt in einen zweiten Spectralapparat ein und wird in ihm bolometrisch untersucht. Bei engen Spalten beider Apparate ist die Reinheit des auf den Bolometerstreifen abgebildeten Spectralgebietes eine ziemlich grosse. Sie kann durch Verbreitern der Spalte und des Bolometerstreifens verschlechtert werden, um ein Urtheil über die Fehler zu ermöglichen, welche aus der Unreinheit entspringen können, und welche die getroffene Anordnung nicht auf andere Weise zu eliminiren gestattet, wie bei meinen früheren Versuchen, bei denen auch die Energie benachbarter Spectralstellen beobachtet werden konnte, durch Hrn. Runge's Spaltbreiten correction. Der Vortheil der neuen Anordnung liegt darin, dass etwa vorhandene diffuse Strahlung nicht gewünschter Wellenlängen in dem zweiten Apparate unschädlich wird, und dass in das Gehäuse des bestrahlten Bolometerstreifens nur die zu untersuchende Strahlung hineingelangt. Die Anordnung der Spectralapparate ist skizzirt auf nachstehender Figur. Die innerste Oeffnung des strahlenden Hohlraumes  $H$  wird mittels des Planspiegels  $s_1$  und des Concavspiegels  $s_2$  möglichst wenig astigmatisch abgebildet auf dem Spalte  $S_1$  des ersten Spectralapparates. Dieser trägt einen hinter dem Prisma  $P_2$  befindlichen und fest mit ihm verbundenen Planspiegel  $s_3$  nach dem von Hrn. F. L. O. Wadsworth<sup>1)</sup>

längen und zugleich Temperaturen aber ungefähr der Thiessen'schen Formel folgen. Ich habe mehrere Formeln gefunden, welche dieses leisten und dabei Wien's allgemeinen Forderungen genügen. Doch verdient das neue Gesetz des Hrn. Planck den Vorzug, weil es theoretisch verständlicher erscheint und exacter den Beobachtungen folgt. — Auch mit den meisten der Bemerkungen des Hrn. Lummer in einem Referat über die Strahlung des schwarzen Körpers (Paris 1900) über diese und frühere Arbeiten von mir bin ich nicht einverstanden. Auf einige bin ich p. 300 Anm. 1 eingegangen.

1) F. L. O. Wadsworth, *Astron. and Astrophys.* 13. p. 835—849. 1894; *Phil. Mag.* (5) 38. 337—351. 1894.

angegebenen Plane. Das Prisma mit dem Spiegel wird um die brechende Kante von  $P_2$  gedreht, um eine beliebige Spectralgegend im Minimum der Ablenkung und scharf auf dem Spalte  $S_2$  des zweiten Apparates abzubilden. Dieser hat die früher von mir beschriebene Einrichtung und enthält die gebräuchliche automatische Vorrichtung, um die Strahlen stets im Minimum der Ablenkung zu halten, wenn der Bolometerarm mit dem Spiegel  $s_7$  gedreht wird. Die Concavspiegel haben



35 cm Brennweite. Das Flusspatprisma  $P_2$  hat Kanten von 3 cm Länge und einen brechenden Winkel von  $60^\circ$ . Dasjenige  $P_1$  ist das früher von mir benutzte.

Die Strahlung wird also siebenmal an silbernen Spiegeln reflectirt und zweimal in je einem Flusspatprisma gebrochen. Eine genaue Vergleichung der Energien verschiedener Spectralbezirke ist daher nicht mehr möglich.

Auch in der Anordnung der Strahlungskörper traf ich zwei Verbesserungen. Da erstens die Oeffnung des Hohlraumes abgebildet werden durfte, erhielt sie die Form eines Spaltes, nur ein wenig länger und breiter als der Spalt  $S_1$ , auf dem sie in natürlicher Grösse abgebildet wurde. Dadurch



erreicht man erstens, dass sicher nur Strahlung von dem Inneren des Hohlraumes zur Messung gelangt, zweitens, dass der Hohlraum durch eine kleinere Oeffnung und gleichmässiger Temperatur der theoretischen Forderung besser entspricht, als bei der Anordnung zur Messung von Energiecurven, bei welcher ich eine grössere Hohlraumöffnung unmittelbar vor den Spalt setzen zu müssen glaubte. Die zweite Verbesserung des Strahlungskörpers bestand darin, dass das eigentliche Strahlungsgefäss, ein dickwandiger Platintiegel, ein Kupfergefäss oder ein Porzellangefäss zunächst von einem abgeschlossenen Luftraum von 2—3 mm Dicke und dann erst von der heizenden Platinfolie umgeben war. Ich habe gefunden, dass die Temperaturungleichheiten der Wände durch diese beiden Verbesserungen für alle Temperaturen vollständig beseitigt werden. Im übrigen ist die Anordnung der benutzten Hohlräume wie in der Arbeit über höhere Temperaturen.<sup>1)</sup>

Die Temperaturbestimmungen mit dem Thermoelemente gründen sich auf die neuen Versuche der Herren Holborn und Day.<sup>2)</sup> Die für mein Element gültige Correction, welche mir Hr. Holborn freundlicherweise zugesandt hat, bringt nur sehr geringe Aenderungen. Da diese Arbeit abgeschlossen war, bevor ich Kenntniss von der neuen Correction erhielt, hatte ich die Resultate nach der alten Temperaturscala berechnet und war zu dem gleichen Verlaufe der Function  $F(\lambda T)$  des Gesetzes (1 b) gelangt, der im Folgenden beschrieben wird.

Zu den folgenden Messungen sind benutzt:

1. Ein Hohlraum, bestehend aus einem innen mit Eisenoxyd überzogenen Platintiegel. Hohlraum I.
2. Ein ähnlicher Hohlraum wie unter 1., dessen Volumen aber doppelt so gross war, und dessen Platinwände doppelte Dicke hatten. Hohlraum II.
3. Ein Porzellanhohlraum, kugelförmig, gebildet durch zwei ineinander geschachtelte Porzellanhohlkugeln, zwischen denen sich eine völlig abgeschlossene Luftschicht befand. Hohlraum III.

1) l. c. p. 6.

2) L. Holborn und A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.



4. Ein Hohlraum, der aus einem aussen vernickelten, innen vernickelten und dann mit Kupferoxyd geschwärzten cylindrischen Kupfergefäß von 10 cm Länge und 5 cm Dicke bestand. Hohlraum IV.

Sämtliche Hohlräume wurden durch elektrische Ströme geheizt.

Die Messungen erstrecken sich auf das Gebiet  $1-8,8 \mu$  der Wellenlängen. Nur solche Stellen im Spectrum wurden benutzt, welche frei sind von den bekannten stärkeren Absorptionsbanden der Zimmerluft.

Die zu prüfenden Formeln sind folgende.

Erstens Wien's Gesetz:

$$(4) \quad J = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}.$$

Nach dieser Formel muss die isochromatische Linie einer Wellenlänge  $\lambda$  folgender Gleichung genügen:

$$(4a) \quad \log(J\lambda^5) = 8 - c_2 \log e \frac{1}{\lambda T}.$$

Da  $\lambda^5$  als ein innerhalb einer isochromatischen Linie constanter Factor der Energie auftritt, muss der Logarithmus des Galvanometeraussschlages  $i^1$ ) eine geradlinige Function der Variablen  $1/T$  sein. Nimmt man als Variable  $1/\lambda T$ , so muss die Neigung der Geraden jeder isochromatischen Linie den Werth  $-c_2 \log e$  haben. Dabei muss der Wert von  $c_2$  der Gleichung genügen:

$$c_2 = 5 \lambda_m \cdot T$$

Hier darf der Wert der constanten Grösse  $\lambda_m \cdot T$  als gegeben durch die bolometrischen Messungen an Energiecurven betrachtet werden.

Es ist der Wert:

$$\lambda_m \cdot T = 2940 \mu \times \text{Cels. Grad nach Lummer und}$$

Pringsheim,

$$\lambda_m \cdot T = 2920 \text{ nach meinen Messungen (vgl. p. 296),}$$

wenn die neue Temperaturcorrection angebracht wird.

1) Corrigirt wegen der Temperatur des Schirmes vor dem Spalt.

Da es auf den Wert der Constanten  $\gamma$  der Formel (4 a) nicht mehr ankommt, kann man auch sagen, dass Wien's Gesetz gültig sein muss, wenn

$$(4b) \quad -\frac{d \log i}{d(1/\lambda T)} = c_2 \log e$$

gültig gefunden wird. Denn aus (4b) und (1b) folgt notwendig Formel (4).

Findet man nicht, dass die Logarithmen der Galvanometerausschläge eine geradlinige Function von  $1/\lambda T$  sind, oder dass sie zwar noch genügend geradlinig verlaufen, aber mit einer anderen Neigung als derjenigen  $c_2 \log e$ , so gilt jedenfalls Wien's Formel (4) nicht. Die Herren Lummer und Pringsheim haben durch solchen Schluss Wien's Formel als ungültig erkannt. Aber es müssen die Beobachtungen dann nach (1b) eine andere Gesetzmässigkeit befolgen, welche ein gutes Kriterium dafür bildet, ob die Beobachtungen in sich übereinstimmen. Formel (1b) verlangt, dass  $\log i$  eine Function von  $\lambda T$ , also auch von  $1/\lambda T$  sein muss. Hat man also bei Isochromaten verschiedener Wellenlänge  $\lambda$  Abweichungen von Wien's Gesetz Formel (4a), so müssen die Curven  $\log i$  als Function von  $1/\lambda T$  doch congruent sein und in ihrem ganzen Verlaufe übereinander fallen, wenn sie durch eine verticale Verschiebung (Multiplication von  $i$  mit einem für jede Isochromate constanten Factor) so übereinander gelegt werden, dass sie für einen Wert von  $1/\lambda T$  zusammenfallen. Die Abweichungen der beobachteten Werte  $\log i$  von den nach Formel (4a) berechneten müssen für gleiche Werte von  $1/\lambda T$ , aber verschiedene Isochromaten (verschiedene  $\lambda$ ) die gleichen Beträge haben. Weicht der beobachtete Differentialquotient (4b) von Wien's Formel ab, so muss er doch für gleiche Werte von  $1/\lambda T$ , aber verschiedene  $\lambda$ , denselben Wert haben. Hätten die Herren Lummer und Pringsheim von vornherein gezeigt, dass ihre Beobachtungen dieser Forderung genügen, so hätten schon ihre ersten Resultate eine grosse Beweiskraft gehabt. Für Energiecurven muss natürlich eine ganz ähnliche Beziehung gelten. Sobald man Abweichungen von Wien's Formel findet, muss doch (1a) gelten, sodass gefundene Abweichungen dieselben sein müssen bei gleichen Werten von  $1/\lambda T$ , aber verschiedenen Energiecurven (Werten

von  $T$ ). Die oben erwähnten und von mir früher gefundenen Abweichungen bei grossen Werten von  $\lambda$  und  $T$  der Energiecurven genügten dieser Forderung nicht in solchem Maasse, dass ich von ihrer Realität überzeugt sein konnte (vgl. p. 295). Die allen Energiecurven gemeinsame Function  $f(\lambda T)$  der Formel (1a) war vielmehr sehr angenähert die Wien'sche.

Das neue von Hrn. M. Planck entdeckte Gesetz lautet bei gleicher Bezeichnung:

$$J = c_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad \text{oder} \quad = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}}.$$

Die Exponentialconstante  $c_2$  wird bestimmt durch die Bedingung:

$$5 = \frac{c_2}{\lambda_m \cdot T} \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda_m \cdot T}}}$$

zu

$$c_2 = 4,9651 \dots \lambda_m \cdot T,$$

während sie nach Wien's Gesetz  $5 \cdot \lambda_m \cdot T$  wird.

Den Gleichungen (4a) und (4b) entsprechen:

$$(5a) \quad \log(J\lambda^5) = 8 - c_2 \log e \frac{1}{\lambda T} - \log\left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}\right),$$

$$(5b) \quad -\frac{d \log(J\lambda^5)}{d\left(\frac{1}{\lambda T}\right)} = c_2 \log e \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}}.$$

Da  $e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$  bei der Grösse von  $c_2$  für grosse Werte von  $1/\lambda T$  sehr klein gegen Eins wird, beschreibt Planck's Formel in einem grossen Gebiete der Variablen  $1/\lambda T$  denselben Verlauf, wie Wien's Formel (vgl. p. 294), da die geringe Verschiedenheit der Werte von  $c_2$  bei den Versuchen nicht merklich ist.

Im Folgenden seien zunächst die Beobachtungen einiger isochromatischer Linien zahlenmässig wiedergegeben. Die nach Wien's und Planck's Formeln berechneten Galvanometerausschläge sind neben den beobachteten angegeben. Als Wert für die Constante  $c_2$  im Exponenten der Formeln ist für alle Berechnungen und auch für die später beschriebene graphische Darstellung angenommen:

$$\text{für Wien's Formel } c_2 = 5 \times 2920 = 14600,$$

$$,, \text{ Planck's } ,, \quad c_2 = 4,9651 \times 2920 = 14498.$$

Die Constante  $c_1$  der Gesetze wurde für jede Beobachtungsreihe so angenommen, dass die beobachtete Curve möglichst genau mit der berechneten übereinstimmte. Für die isochromatischen Linien grösserer Wellenlängen war dies für die ganze Linie nach Wien's Gesetz nicht mehr möglich. Doch gehörte immer noch ein Stück dieser Curven dem Gültigkeitsbereiche von Wien's Formel an, sodass aus diesem Stücke ein Wert für  $c_1$  berechnet werden konnte.

In den Zahlentabellen bedeutet  $\lambda$  die mittlere Wellenlänge des untersuchten Spectralbezirkes in  $\mu$ ,  $T$  die beobachtete absolute Temperatur,  $i$  den beobachteten und auf die Temperatur Null des Schirmes reducirten Galvanometerausschlag. Der Betrag dieser Correction ist nebst der Schirmtemperatur jedesmal aufgeführt. Schliesslich finden sich die für die Berechnung nach Formel (4a) (Wien) oder (5a) (Planck) benutzten Werte der Constanten  $\gamma$  und ferner der Factor, mit dem die Galvanometerausschläge jeder Curve multiplicirt werden müssen, damit alle Isochromaten möglichst gut übereinanderfallen und eine einzige Curve ergeben (vgl. p. 293). Da jede Isochromate mit denjenigen benachbarter Wellenlängen ein grosses Gebiet der Werte  $1/\lambda T$  gemeinsam hat, so liess sich dieser Factor sicher bestimmen: entweder durch eine graphische Verschiebung der in logarithmischem Maasse ( $\log i = f(1/\lambda T)$ ) dargestellten Curven oder vermittelst der berechneten Werte  $\gamma$  der Formel (5a). Die resultirende mittlere Curve ergibt für ein möglichst grosses Gebiet die der Formel (1b) entsprechende Function  $F(\lambda T)$ .

$$\lambda = 1,0959 \mu.$$

Spaltbreite <sup>1)</sup> 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur =  $9,8^\circ \text{C.}$ ;  
Schirmcorrection 0,00.

$T$	1333,4	1553,1	1628,3	1098,7
$1/\lambda T$ 0,00	06843	05876	06868	08784
$i$ { beob.	60,6	252,6	59,3	3,65
Wien	61,44	252,5	59,14	3,61
Planck	61,27	249,4	58,97	3,68
$\gamma$ { Formel (4a)	6,1276	Factor 0,0001142.		
Formel (5a)	6,0959			

1) Dies ist die genaue Breite des Spaltes und Bolometerstreifens im zweiten Spectralapparat und die ungefähre Spaltbreite des ersten.

$$\lambda = 1,6938 \mu.$$

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 12,8° C.;  
Schirmcorrection 0,00.

<i>T</i>	1455,1	1074,2	1071,7	822,9
$1/\lambda T$ 0,00	04059	05497	05510,	07176,
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1493 \\ 1493 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 182,6 \\ 182,6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 178,4 \\ 179,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 16,4 \\ 15,74 \end{array} \right.$
Planck	1484	184,1	180,7	16,14

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5,7474 \\ 5,7261 \end{array} \right. \text{Factor } 0,0002674.$$

$$\lambda = 1,9863 \mu.$$

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur 12,0° C.;  
Schirmcorrection 0,00.

<i>T</i>	1358,1	1057,9	886,7	759,4	670,0	1351,1	1581,4
$1/\lambda T$ 0,00	03808	04882	05824	06798	07707	08822	08266
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1023 \\ 1042 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 213,0 \\ 215,4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 54,9 \\ 54,44 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,2 \\ 13,12 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,67 \\ 3,48 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1004 \\ 1012 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2307 \\ 2281 \end{array} \right.$
Planck	1087	216,5	55,21	13,43	3,59	1007	2270

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5,4287 \\ 5,4085 \end{array} \right. \text{Factor } 0,0005556.$$

$$\lambda = 2,9085 \mu.$$

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur 12,1° C.;  
Schirmcorrection 0,00.

<i>T</i>	1366,1	1064,4	908,0	774,8	675,3	1595,3	1364,3
$1/\lambda T$ 0,00	02517	03230	03807	04437	05091	02155	02520
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 596,8 \\ 600,0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 211,9 \\ 211,9 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 90,36 \\ 91,16 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 36,87 \\ 36,33 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,51 \\ 13,99 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1054 \\ 1013 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 597,1 \\ 597,1 \end{array} \right.$
Planck	604,4	211,3	90,94	36,40	14,10	1042	601,4

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 4,3740 \\ 4,3547 \end{array} \right. \text{Factor } 0,006289.$$

$$\lambda = 3,7650 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 14,6° C.;  
Schirmcorrection + 0,04.

<i>T</i>	1467,0	1077,8	839,5	627,5	580,9	442,2
$1/\lambda T$ 0,00	01810	02464	03164	04233	05002	06006
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2101 \\ 1974 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 760,2 \\ 760,0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 271,6 \\ 273,7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 58,36 \\ 57,47 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 18,23 \\ 18,67 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,53 \\ 4,31 \end{array} \right.$
Planck	2080	768,7	273,8	57,61	18,86	4,40

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 4,4434 \\ 4,4252 \end{array} \right. \text{Factor } 0,005346.$$

$$\lambda = 4,7007 \mu.$$

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 12,1° C.;  
Schirmcorrection + 0,03.

$T$	1478,8	1084,8	893,1	628,6	
$1/\lambda T 0,00$	01438	01962	02553	03385	
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 223,8 \\ 199,4 \\ 221,7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 96,34 \\ 92,86 \\ 96,44 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 38,67 \\ 39,15 \\ 39,49 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 11,78 \\ 11,64 \\ 11,64 \end{array} \right.$	

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,2118 \\ 3,1936 \end{array} \quad \text{Factor } 0,09114.$$

$$\lambda = 4,8355 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.;  
Schirmcorrection + 0,20.

$T$	1189,1	1013,3	782,6	620,1	493,2	419,9
$1/\lambda T 0,00$	01739	02041	02643	03335	04193	04924
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 583,0 \\ 555,7 \\ 585,3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 364,8 \\ 357,7 \\ 366,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 148,1 \\ 148,6 \\ 148,4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 54,10 \\ 54,09 \\ 53,65 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 15,97 \\ 15,45 \\ 15,37 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,32 \\ 5,31 \\ 5,31 \end{array} \right.$

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,8478 \\ 3,8259 \end{array} \quad \text{Factor } 0,02125.$$

$$\lambda = 6,2554 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 14,1° C.;  
Schirmcorrection + 0,37.

$T$	1467,5	1081,0	841,5	631,4	528,9	441,8
$1/\lambda T 0,00$	01089	01479	01900	02532	03023	03618
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 305,6 \\ 247,3 \\ 302,1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 153,0 \\ 140,1 \\ 154,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 78,52 \\ 75,75 \\ 79,06 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 29,85 \\ 30,09 \\ 30,38 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,76 \\ 14,71 \\ 14,72 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,29 \\ 6,16 \\ 6,16 \end{array} \right.$

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,0839 \\ 3,0657 \end{array} \quad \text{Factor } 0,1223.$$

$$\lambda = 7,7267 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,8° C.;  
Schirmcorrection + 2,13.

$T$	1567,3	1315,6	987,6	778,2	596,2	476,3
$1/\lambda T 0,00$	008258	009837	01341	01663	02170	02717
$\left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 604,9 \\ 483,7 \\ 601,0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 488,1 \\ 344,4 \\ 439,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 242,0 \\ 213,7 \\ 242,7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 136,8 \\ 127,7 \\ 136,9 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 63,39 \\ 60,87 \\ 62,39 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 27,11 \\ 27,40 \\ 27,55 \end{array} \right.$

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4a)} \\ \text{Formel (5a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,1608 \\ 3,1426 \end{array} \quad \text{Factor } 0,1025.$$

$$\lambda = 7,7293 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.;

Schirmcorrection + 1,99.

$T$	1179,1	961,0	766,3	572,3	475,6	408,4
$1/\lambda T$ 0,00	01097	01346	01688	02260	02720	03168
$i$ { beob.	327,8	213,1	123,0	51,09	26,27	13,49
Wien	279,1	194,0	117,8	51,06	26,11	13,58
Planck	333,5	215,9	123,3	51,07	25,73	13,32

$$\begin{cases} \text{Formel (4a)} & 3,1415 \\ \text{Formel (5a)} & 3,1148 \end{cases} \quad \text{Factor 0,1093.}$$

$$\lambda = 8,7973 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 15,2° C.;

Schirmcorrection + 0,96.

$T$	1184,5	988,4	767,3	578,6	481,3	410,5
$1/\lambda T$ 0,00	009596	01150	01481	01965	02361	02769
$i$ { beob.	92,26	65,86	36,84	17,16	9,00	5,09
Wien	71,83	54,37	33,54	16,56	9,27	5,12
Planck	92,54	64,93	36,97	17,18	9,42	5,14

$$\begin{cases} \text{Formel (4a)} & 2,4647 \\ \text{Formel (5a)} & 2,4465 \end{cases} \quad \text{Factor 0,5091.}$$

$$\lambda = 8,7958 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,1° C.;

Schirmcorrection 0,98.

$T$	1458,6	1069,8	844,4	625,6	483,1
$1/\lambda T$ 0,00	007795	01063	01347	01817	02353
$i$ { beob.	131,7	74,43	44,51	20,46	9,22
Wien	90,40	59,79	39,52	19,86	9,08
Planck	129,1	73,75	44,83	20,90	9,22

$$\begin{cases} \text{Formel (4a)} & 2,4504 \\ \text{Formel (5a)} & 2,4322 \end{cases} \quad \text{Factor 0,5261.}$$

Während in diesen Beispielen nur wenige der beobachteten Curven wiedergegeben sind, finden sich auf Taf. IX die Beobachtungspunkte aller Messungsreihen in der Darstellung  $\log i = f(1/\lambda T)$ . Zunächst sind alle beobachteten Isochromaten, welche nahe derselben Wellenlänge entsprechen, übereinander gelegt. Bei diesen einzelnen Beobachtungsreihen war der Hohlraum oder die Spaltbreite verschieden. Die Curven enthalten die Beobachtungspunkte folgender übereinander gezeichneter Isochromaten:



Curve 1:  $\lambda = 1,0616, 1,2875, 1,0959, 1,0504, 1,0279, 1,6933, 1,9363,$   
 $1,9770, 1,9942, 2,0303$ , bezeichnet als  $\odot \odot \odot$  und

$\lambda = 2,9085, 3,5327, 3,5389, 3,8572, 3,7610, 3,7650, 3,7202,$   
 bezeichnet als  $\times \times \times$ .

Curve 2:  $\lambda = 4,8355, 4,6433, 4,5897, 4,6150, 4,7007, 4,7007, 4,6198,$   
 $4,6133, 4,6509, 4,6511, 4,6868, 4,7007, 4,6008$ .

Curve 3:  $\lambda = 6,2622, 6,2622, 6,2622, 6,2724, 6,2651, 6,2554, 6,2647,$   
 $6,2635$ .

Curve 4:  $\lambda = 7,6503, 7,7125, 7,6921, 7,7267, 7,6255, 7,7298, 7,6823,$   
 $7,6823$ , bezeichnet als  $\times \times \times$  und

$\lambda = 8,7973, 8,7958, 8,7958, 8,7958, 8,7958$ ,  
 bezeichnet als  $\odot \odot \odot$ .

In Curve 5 endlich sind alle diese Curven durch verticale Verschiebung zu einer einzigen vereinigt. In Curve 6 finden sich meine sämtlichen Beobachtungen für Werte  $1/\lambda T > 0,0003$  zusammen mit den photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir, und Wanner allein dargestellt, um zu zeigen, dass die Neigung aller dieser Isochromaten die gleiche und zwar die dem Wien'schen oder Planck'schen Gesetze entsprechende ist. In sämtlichen Curven folgt die gerade Linie ----- der Formel (4a) (Wien's Gesetz) und die ausgezogene Linie der Formel (5a) (Planck's Gesetz). Die Curven 2, 3, 4 sind doppelt so gross dargestellt, als die Curven 1, 5, 6, um die Abweichungen von Wien's Gesetz deutlich zu machen.

Aus dem wiedergegebenen Beobachtungsmateriale schliesse ich folgendes:

Für grössere Werte von  $1/\lambda T$  als ungefähr 0,0003 ( $\lambda T < 3000$  ungefähr) folgen die Beobachtungen innerhalb der möglichen Fehler dem Wien'schen Gesetze. Für kleinere Werte von  $1/\lambda T$  als ungefähr 0,0003 ( $\lambda T > 3000$  ungefähr) treten in allen Curven Abweichungen vom Wien'schen Gesetze auf, welche für gleiche Werte von  $1/\lambda T$  in verschiedenen Isochromaten denselben Betrag haben, sodass Formel (1b) nicht verletzt ist. Erst diese Thatsache, welche aus der gewählten Darstellung einwandfrei hervorgeht, beraubte mich der Möglichkeit, die Abweichungen als fehlerhaft anzusehen.

Innerhalb des ganzen Beobachtungsgebietes gilt Planck's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler.

Mit diesem Resultate sind in guter Uebereinstimmung die photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir und

von Wanner allein. Denn aus ihnen folgt die Gültigkeit von Wien's Gesetz (4a) mit  $c_2 = 14600^1)$  für Werte von  $1/\lambda T$ , welche zwischen 0,0020 ( $\lambda = 0,486 \mu$ ,  $T = 1033,3^\circ$ ) und 0,00095 ( $\lambda = 0,656 \mu$  und  $T = 1603,3$ ) liegen. Wenn diese Beobachtungen in meine Curve 1 (Taf. IX) eingetragen werden, wird diese Curve entsprechend Wien's Gesetz nach der Seite der wachsenden Werte  $1/\lambda T$  um mehr als das Doppelte verlängert. Dies zeigt Curve 6. Der kleinste Wert  $1/\lambda T$  der photometrischen Versuche ist zugleich der grösste Wert des jetzt von mir untersuchten Beobachtungsgebietes. Auch Wanner's Resultat, dass Wien's Gesetz im Sichtbaren bis  $4000^\circ$  gelten müsse, ist im Einklange mit meinen jetzigen Messungen, da in diesem Falle  $\lambda T \leq 4000 \times 0,7 (= 2800)$  ist, also noch in dem Gültigkeitsbereiche von Wien's Formel liegt.<sup>2)</sup> Die einfache von Wanner hierauf hin vorgeschlagene Methode der Temperaturmessung wird überall richtige Werte liefern, wo die Strahlung im Sichtbaren schwarz ist. Es scheint, dass dies für viele glühende Körper nahe zutrifft.

Auch mit Planck's Gesetz sind die photometrischen Versuche im Einklang. Denn dies Gesetz ergibt für  $\lambda T < 3000$  Werte des Differentialquotienten

$$-\frac{d \log_e (J \lambda^5)}{d 1/\lambda T} = N,$$

welche bis auf etwa 1 Proc. constant sind. Unter der Annahme  $\lambda_m T = 2920$  nämlich werden die folgenden Werte  $N$  berechnet:

$1/\lambda T$	0,01	0,002	0,0015	0,0010	0,00070	0,00050	0,0003401	0,0003333
$N$	14498	14498	14498	14498	14498	14507	14600	14611

Die Beobachtungen sind nicht genau genug, um das geringe Anwachsen des Differentialquotienten zwischen  $1/\lambda T = 0,00050$

1) Wanner giebt 14500 an in guter Uebereinstimmung mit Planck's Gleichung und  $\lambda_m T = 2920$ . Der Wert 14600 würde noch eine gute Darstellung der Beobachtungen ergeben, wie aus den von Wanner angegebenen Einzel- und Mittelwerten ersichtlich ist.

2) Obwohl gerade in der Nähe dieses Wertes  $\lambda T$  auch die Beobachtungen von Lummer und Pringsheim einigermaassen dem Wien'schen Gesetze zu folgen scheinen, drücken sie doch über diese Beobachtung und Schlussfolgerung von Wanner ihre Verwunderung aus O. Lummer u. E. Pringsheim, l. c. 3. Arbeit p. 165, Anm. 2.

und 0,0003333 mit Sicherheit ergeben zu können, sie sind also mit Planck's Formel in gleicher Weise wie mit Wien's Formel im Einklange.

Auch an den Resultaten meiner Messungen der Energiecurven bei niederen Temperaturen ist nichts Wesentliches zu ändern. Denn unter den dort vorkommenden Werten der Grösse  $1/\lambda T$  liegt keiner in dem Gebiete, wo die Abweichungen von Wien's Gesetz bereits ausserhalb der Beobachtungsfehler jener Arbeit wären. Dagegen müssen die bei langen Wellen liegenden Aeste meiner Energiecurven höherer Temperatur merklich geändert werden, damit sie im Einklang mit den Resultaten der Isochromaten sind. Diese Aeste müssen weniger steil abfallen, als meinen Beobachtungen entspricht. Ich habe mit dem Hohlraume II noch eine Beobachtungsreihe von Energiecurven höherer Temperaturen gemacht, bei welcher mein Apparat mit neuen, optisch sehr genauen Silberspiegeln ausgestattet war, deren Politur vorzüglich war und über deren Reflexionsfähigkeit besondere Versuche mir eine genauere Kenntnis verschafft hatten. Aber ich habe nicht den Verlauf erhalten, welcher den Resultaten dieser Arbeit entspricht. Die langwelligen Aeste dieser Energiecurven fallen zwar nicht so steil ab, wie Wien's Curve, sie liegen aber der Wien'schen Curve näher als der Planck'schen. Sollen diese in logarithmischem Maasse dargestellten Energiecurven congruent sein, wie es Formel (1a) verlangt, so würde der den Curven verschiedener Temperatur entsprechende mittlere Curvenzug der Wien'schen Curve wieder sehr nahe kommen. Dagegen gehen diese Energiecurven in diejenigen des Planck'schen Gesetzes über und erfüllen dabei die Forderung der Congruenz weit besser, wenn ich annehme, dass aus einem mir nicht bekannten Grunde bei längeren Wellenlängen die Energie meines Spectrums geschwächt erscheint, sodass die beobachtete Energie bei folgenden Wellenlängen mit den darunter verzeichneten Factoren multiplicirt werden muss:

$\lambda =$	3,91	4,59	5,12	6,26	7,74	8,25	8,81	9,33
Factor:	1,020	1,038	1,050	1,068	1,165	1,195	1,31	
				(1,035)	(1,06)	(1,07)	(1,075)	(1,089)

Wenn diese Energiecurven durch diese Correctionen die Form des Planck'schen Gesetzes erhalten, so ändern sich die Werte der maximalen Energie und Wellenlänge  $J_m$  und  $\lambda_m$  nur unwesentlich. Ebenso bringt die neue Temperaturcorrection nur geringe Aenderungen. So ergibt die erwähnte neue Beobachtungsreihe an Hohlraum II z. B.

$T$ abs.	$\lambda_m$	$\lambda_m \cdot T$	$J_m$	$J_m / T^5 \times 10^{15}$
1580,6	1,846	2918	12,26	1,242
1567,9	1,858	2913	12,28	1,296
1357,4	2,157	2929	5,797	1,258
1352,7	2,159	2920	5,665	1,251
1347,4	2,172	2927	5,499	1,238
1337,4	2,188	2926	5,454	1,275
1055,2	2,777	2929	1,643	1,255
1053,7	2,770	2919	1,660	1,277
1052,2	2,781	2926	1,667	1,293
875,0	3,328	2911	0,642	1,252
876,4	3,333	2914	0,637	1,232
Mittel: 2921				

Diese Factoren sind je nach der Anordnung des Hohlraumes und der Weite des Spaltes etwas verschieden. Sie sind grösser für kleinere Hohlraumöffnungen und Spaltbreiten. Die oben eingeklammerten Werte von Factoren entsprechen ungefähr Hohlräumen mit grösseren Oeffnungen und Spaltbreiten von 5 Minuten, wie solche auch bei niederen Temperaturen angewandt wurden. Es ist daher möglich, dass diese Messungen mit den eingeklammerten Factoren zu corrigiren sind. Sie würden dadurch zwar unerheblich, aber doch so geändert, dass der Wert von  $\lambda_m \cdot T$  in bessere Uebereinstimmung mit den Resultaten der höheren Temperaturen kommt, wie folgende Tabelle zeigt, welche die Resultate der mit Bolometer V meiner Arbeit über niedere Temperaturen gewonnenen Energiecurven enthält, nachdem die eingeklammerten Correctionen angebracht sind.

$T$ abs.	$\lambda_m$	$\lambda_m \cdot T$	$J_m$	$J_m / T^5 \times 10^{15}$
723,0	4,038	2920	4,169	2,101
577,1	5,047	2913	1,352	2,105
462,4	6,310	2917	0,4365	2,065
373,0	7,798	2909	0,1513	2,097
Mittel: 2915				

Ich vermute als Ursache dieser Fehlerquelle bei den längsten Wellen die Beugung an den Rändern der Oeffnungen des Hohlraumes und Spaltes. Sichtbare Strahlen gelangten stets nur von der Hinterwand des Hohlraumes zum Bolometer. Strahlung 10 facher Wellenlänge dagegen müsste durch Beugung auch von den kühleren Blenden in und vor der Oeffnung des Hohlraumes das Bolometer erreicht haben, um so mehr, je kleiner die Oeffnung des Spaltes und des Hohlraumes war. Ich musste aber kleine Oeffnungen anwenden, da ich nicht die Mittel habe, grössere Hohlräume hoch zu erhitzen. Die Anordnung der vorliegenden Untersuchung ist von dieser Fehlerquelle frei.

Als Gesamtergebnis aller meiner Versuche und derjenigen von Wanner und mir und Wanner allein folgt die Gültigkeit von Planck's Gesetz innerhalb des Gebietes

$$1/\lambda T = 0,002 \text{ bis } 0,000078,$$

$$\lambda T = 500 \text{ bis } 13000.$$

Das Ergebnis der Arbeit der Herren Rubens und Kurlbaum ist die Gültigkeit von Planck's Gesetz zwischen den Werten  $\lambda = 28 \mu$  (ungefähr),  $T = 85$ ,  $1/\lambda T = 0,00042$  und  $\lambda = 51,2 \mu$ ,  $T = 1773$ ,  $1/\lambda T = 0,000011$ . Das Gebiet der Werte  $1/\lambda T = 0,00042$  bis  $0,000078$  ist ein gemeinsames für diese Messungen und die meinigen. Obwohl die Wellenlängen ausserordentlich verschieden sind, herrscht hier doch eine gute Uebereinstimmung in der Form der Function  $F(\lambda T)$  der Formel (1b). Hieraus folgt unter anderem, dass die schwierige Bestimmung der grossen Wellenlängen der Reststrahlen des Flussspates und Steinsalzes gut gelungen sein muss. Auch die Messungen der Herren Lummer und Pringsheim werden, soweit ich es nach ihren Angaben beurteilen kann, wenigstens für grössere Werte von  $\lambda T$  gut mit Planck's Gesetz vereinbar sein.

1) Für kleinere Werte von  $\lambda T$  dagegen würden bedeutende Abweichungen bleiben, wenn die Beobachtungen hier wirklich der Thiessen'schen Formel folgen. Nach meinen Beobachtungen ist für  $\lambda T < 3000$  Thiessen's Formel nicht gültig. Denn der Differentialquotient

$$-\frac{d \log_e (J \lambda^5)}{d 1/\lambda T}$$

würde nach Thiessen mit abnehmendem  $\lambda T$  kleiner werden, und z. B. im Sichtbaren für  $T = 1200$  schon den Wert 13850 haben, während

sodass nunmehr unter allen Beobachtern eine gute Uebereinstimmung herrschen dürfte. Dass das Gesetz Planck's zwischen  $1/\lambda T = 0,002$  und  $0,00001$  gültig gefunden ist, kann wohl kaum mehr einem Zufall zugeschrieben werden.

Die folgenden zwei Notizen geben kurz die Resultate einer neuen Bestimmung der Dispersion des Flussspates und einer Messung der selectiven Reflexionsfähigkeit einiger Metallspiegel, deren Kenntniss mir erwünscht war.

Wanner's und meine Beobachtungen für alle beobachteten Werte  $\lambda T < 3000$  die Constanz des Differentialquotienten innerhalb der etwa 2 Proc. betragenden höchstens möglichen Fehler der Mittelwerte ergeben: in Uebereinstimmung mit Wien's und Planck's Gesetzen. Ein Wert  $c_2 < 14300$  dürfte im Sichtbaren für Temperaturen von etwa  $1200^\circ$  nach unseren Versuchen nicht möglich sein. Wenn die Herren Lummer und Pringsheim bereits bei  $1,21 \mu$  den Wert  $c_2 = 13510$  finden (l. c. p. 36), so widerspricht das meinen Beobachtungen, dem Wien'schen und dem Planck'schen Gesetz, ist aber mit Thiessen's Formel in Uebereinstimmung. Vielleicht aber ist diese Isochromate von Lummer und Pringsheim nicht mehr so genau beobachtet, um sichere Schlüsse zuzulassen.

(Eingegangen 29. November 1900.)



### 3. Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flussspates im Ultrarot; von F. Paschen.

Versuchsanordnung (vgl. Figur).

Es bedeuten:  $s_1$  den Spalt des Prismenapparates,  $G$  das früher schon von mir benutzte Rowland'sche Concavgitter, drehbar um eine verticale Axe,  $S$  ein silberner Concavspiegel, der sich in der Richtung des Pfeiles verschieben lässt,  $s_2$  einen bilateral erweiterbaren Spalt.

Das vom Spalt  $s_2$  kommende Licht erhielt bei einer geeigneten Stellung des Spiegels  $S$  eine solche Convergenz (oder Divergenz), dass das Spectrum der gewünschten höheren Ordnung scharf auf dem Spalte  $s_1$  entworfen wurde. Man benutzte zur Justirung die im Knallgasgebläse erzeugten Natriumlinien. Die Dispersion des in der Ebene des Spaltes  $s_1$  abgebildeten Gitterspectrums war eine solche, dass die  $D$ -Linien  $n-1^{\text{ter}}$  und  $n+1^{\text{ter}}$  Ordnung je um durchschnittlich 50 mm vom Spalt entfernt lagen, wenn die  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit dem Spalte coincidirten. Die Justirung der  $D$ -Linien auf dem Spalte  $s_2$  geschah mit engem Spalte  $s_2$ . Zur Messung wurde  $s_2$  so viel erweitert, dass genügende Energie zur exacten Messung auf den Bolometerstreif fiel. Der Bolometerstreif und das Spaltbild einer Linie im Prismenapparate nahmen einen Winkel von 3 Min. im Spectrum ein. Nur bei wenigen Versuchen wurden die Bolometer- und Spaltbreiten 1,5 Min. gewählt. Die Dispersion sowohl des Prismen- wie des Gitterapparates war ungefähr doppelt so gross, als bei meinen früheren Bestimmungen.



Die abbildenden Teile der Apparate waren genügend vollkommen, sodass auch die Definition in den Spectren entsprechend gesteigert war. Die Leistungsfähigkeit des bolometrischen Apparates<sup>1)</sup> war durch ein empfindlicheres Galvano-

1) In Hrn. Lummer's Referat, Paris 1900, p. 70 steht folgender Satz: „Paschen emploie le bolomètre à bande de Lummer et Kurlbaum (Wied. Ann. 46. p. 204—224. 1892), qu'il dit avoir rendu dix fois plus sensible: mais cette assertron repose sur une erreur.“ Erstens benutze ich meine eigenen Bolometer, deren Streifen allein aus Lummer-Kurlbaum'schem Platinsilberblech bestehen, welche im übrigen aber ähnlich den Langley'schen und wesentlich anders construiert sind, als die von Lummer und Kurlbaum beschriebenen Bolometer. Zweitens steht in meinem Aufsätze (Wied. Ann. 48. p. 286. 1893): „Es wird auffallen, dass O. Lummer und F. Kurlbaum nur einen Hauptstrom von 0,006 Amp. benutzten und nur einen solchen von 0,004 Amp. benutzen konnten, trotzdem ihre Streifen bei gleicher Dicke doppelt so breit waren als meine.“ Statt „0,004 Amp.“ muss es hier heissen „0,04 Amp.“ nach den Angaben von Lummer u. Kurlbaum (l. c. p. 222). Dass „0,004 Amp.“ ein Druckfehler ist, geht aus dem Sinne des Satzes hervor, auch habe ich es den Herren Lummer und Kurlbaum damals (1893) brieflich mitgeteilt und durch Beilage der Seite aus meinem Manuscripte belegt, als dieselben mir ein zur Veröffentlichung bestimmtes Concept sandten, welches durch die Zahl „0,004“ veranlasst war. Ferner habe ich diesen Druckfehler (Wied. Ann. 49. p. 52, Anm. 1. 1893) berichtigt. Hr. Lummer kann demnach diesen Druckfehler „0,004 Amp.“ nicht wohl von neuem meinen. Es bleiben dann nur noch folgende Stellen meiner citirten Arbeit: p. 279 sagte ich, dass der Thermoapparat bei Benutzung des dort beschriebenen Bolometers erst durch die Anwendung eines geeigneten Galvanometers erheblich an Empfindlichkeit gewänne, und p. 286, dass die von mir gewöhnlich benutzte Empfindlichkeit sich als 300 mal grösser berechne als die, welche Lummer und Kurlbaum für ihr Beispiel anwandten. Statt dieses Empfindlichkeitsverhältnisses würde das 1:40 übrig bleiben, wenn der Bolometerstrom bei Lummer und Kurlbaum von 0,006 Amp. auf das höchstmögliche Maass 0,04 Amp. erhöht würde. Diese Steigerung der Empfindlichkeit kommt, wie ich ausgeführt habe, hauptsächlich auf Rechnung meines Galvanometers. Andere Aussagen über das Verhältnis meiner Bolometer zu denen Lummer und Kurlbaum's habe ich nie gemacht, und die obigen Aussagen beruhen, so viel ich sehe, nicht auf einem Irrtum. Ich schätze übrigens die schöne Platinfolie von Lummer und Kurlbaum sehr und habe sie vielfach empfohlen.

In demselben Referate des Hrn. Lummer steht über die Schwärzung des Bolometers durch eine spiegelnde Hülle p. 53 und 54 folgendes: „il est préférable d'employer une enveloppe polie, ainsi que nous l'avons fait, Pringsheim et moi (Wied. Ann. 63. p. 397. 1897), avec le bolomètre

meter in dem Maasse gesteigert, wie die Lichtstärke infolge der grösseren Dispersion abgenommen hatte. Die exacten Messungen mit dieser Anordnung bis zur Wellenlänge  $7\ \mu$  teile ich hier mit.

*Beispiel.* Resultate der Messung der Wellenlänge  $3,2413\ \mu$  entsprechend dem Beugungsbilde zweiter Ordnung, wenn die D-Linien elfter Ordnung auf dem Spalte  $s_1$  abgebildet waren:  $3,2413 = 11/2\ 0,5893$ . Die einzelnen Messungsreihen der Energiecurven der Beugungsbilder ergaben die Maxima bei folgenden Minimalablenkungen:

30°	9,269'	11,0° C.
	9,192	11,0
	9,148	10,6
	9,243	10,1
	9,379	9,9
	9,343	10,2
	9,167	10,1
	9,194	10,4
	9,180	10,3
	9,240	10,3

Mittel: 30° 9,236'  
 = 30° 9' 14,2" w. F. = 0,98"

Mittel: Temp. = 10,3° C.

Der umrandete Teil der folgenden Tabelle enthält die Messungsergebnisse. Es sind angegeben: die beobachteten mittleren Minimalablenkungen  $\delta$  und ihr wahrscheinlicher Fehler  $\omega.F$  in Secunden, die Anzahl Messungsreihen, die mittlere Temperatur und der Brechungsexponent  $n$ . In den drei letzten Columnen sind die Differenzen der beobachteten Brechungs-

de surface, et ainsi que l'a réalisé plus tard Paschen (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 4. 1899; Wied. Ann. 60. p. 722. 1897) pour le bolomètre linéaire." Erstens haben Lummer und Pringsheim 1897 nur gesagt, *Versuche mit einem Bolometer, bei dem die reflectirte Energie mittels eines versilberten Hohlspiegels wiedergewonnen wird, sollen zeigen, inwieweit etc.* Zweitens geht aus den Citaten hervor, dass mein Vorschlag, das Bolometer in eine spiegelnde Hülle zu setzen, der ältere ist. (Zweites Citat meiner Arbeiten, welches älteren Datums ist, als das Citat der Arbeit von Lummer und Pringsheim.)

$\lambda$ ( $\mu$ )					$n$ beob.	$\Delta n$ Einh. der 5. Dec. beob.—ber.				
						Fl. (Ia)	Fl. (Ib)	Fl. (II)		
0,82525					Fachsen	1,44987	+ 4	+ 4	+ 4	
0,84015						1,44775	- 3	- 4	- 4	
0,86009						1,44535	-14	-14	-13	
0,89681						1,44214	- 3	- 3	- 3	
0,41012						1,44121	+ 2	+ 1	+ 2	
0,48607						1,43713	0	+ 1	+ 1	
0,58932						1,43393	+ 1	0	+ 1	
0,65618						1,43257	- 2	- 2	- 1	
0,68671						1,43200	- 9	- 9	- 8	
0,71836						1,43157	- 6	- 6	- 6	
0,76040					1,43101	- 8	- 8	- 9		
	$\delta$	w. F.	Anzahl der Messungsreihen <sup>1)</sup>	Mittlere Temp. °C.						
	Grad Min. sec	sec								
0,8840	31	16	3,1	1,19	11	11,0	1,42989	0	0	+ 1
1,1786	31	6	40,1	1,66	11	10,8	1,42798	- 1	0	0
1,4733	30	59	30,5	0,95	7	11,1	1,42652	- 1	- 2	- 1
1,5715	30	57	22,6	1,12	11	10,6	1,42608	0	0	+ 1
1,7680	30	52	46,6	1,20	14	10,8	1,42515	0	0	0
2,0626	30	45	36,2	0,91	6	10,7	1,42368	- 1	- 1	- 1
2,1608	30	43	7,1	0,71	6	10,7	1,42317	0	0	0
2,3573	30	37	47,5	0,86	13	10,7	1,42208	0	0	- 1
2,6519	30	29	10,3	0,87	7	10,3	1,42032	+ 1	0	0
2,9466	30	19	35,1	0,80	20	10,9	1,41835	- 1	- 2	- 3
3,2413	30	9	14,2	0,98	10	10,3	1,41623	+ 3	+ 2	0
3,5359	29	57	49,3	1,18	7	11,2	1,41388	+ 2	0	- 1
4,1252	29	32	7,9	0,72	7	10,5	1,40858	+ 4	+ 3	0
4,7146	29	2	21,3	0,97	12	10,5	1,40242	+ 7	+ 5	+ 2
5,3039	28	28	11,9	1,08	9	10,5	1,39531	+ 5	+ 3	0
5,8932	27	49	26,8	2,32	12	11,0	1,38721	0	- 3	- 5
6,4825	27	7	14,0	0,90	8	10,6	1,37834	+16	+14	+13 <sup>1)</sup>
7,0718	26	18	50,4	2,85	5	10,5	1,36810	+ 3	- 1	0
7,6612							1,35680	- 4	-10	- 8
8,2505							1,34444	- 2	- 7	- 3
8,8398							1,33079	0	- 7	- 2
9,4291							1,31612	+36	+29	+34

Brechender Winkel:  $59^\circ 59' 15''$ .

1) Dieselbe Wellenlänge wurde vielfach aus mehreren verschiedenen Gitterordnungen bestimmt, wie l. c. gezeigt ist.

2) Diese Abweichung liegt weit ausserhalb der möglichen Fehler. Die Wellenlänge  $6,48 \mu$  fällt in das Maximum der stärksten Absorption des Wasserdampfes der Luft. Bei kleineren Wellenlängen steigt die Energie sehr schnell bis zu der Stelle  $6,26 \mu$ , wo keine erhebliche Absorption ist. Es ist wahrscheinlich, dass von dieser Energie kürzerer Wellenlänge ein wenig in den Spalt des Prismenapparates hineingelangte.

exponenten von den nach Ketteler's Formeln berechneten in Einheiten der fünften Decimalen aufgeführt.

Ketteler's Formeln.

$$(I) \quad n^2 = a^2 - \frac{M_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2},$$

$$(II) \quad n^2 = A^2 - \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} - h\lambda^2 - h\lambda^4.$$

Die Zahlenwerte der zur Berechnung benutzten Constanten sind:

$$\text{Formel (Ia) } \begin{cases} a^2 = 6,09104 \\ \lambda_1^2 = 1258,47 \\ \lambda_2^2 = 0,008884 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1 = 5099,15 \\ M_2 = 0,00612093 \end{matrix}$$

Dies sind die Werte, mit denen die Formel (I) meine ersten Beobachtungen<sup>1)</sup> gut darstellte.

$$\text{Formel (Ib) } \begin{cases} M_1 = 5102,07 \\ \lambda_1^2 = 1259,19 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{die übrigen Constanten} \\ \text{wie in Formel (Ia)} \end{matrix}$$

$$\text{Formel (II) } \begin{cases} A^2 = 2,03913 \\ k = 0,0032055 \\ h = 0,0,2894 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_2 = 0,006125 \\ \lambda_2^2 = 0,008884 \end{matrix}$$

Die letzte Formel giebt den besten Anschluss an die Beobachtungen. Die Abweichungen der Beobachtungen von den Formeln entsprechen im Ultrarot wenigen Einheiten der dritten Decimalen im Werte der Wellenlängen, sodass es möglich scheint, durch exacte Einstellung diese Decimale noch einigermassen genau zu messen.

1) F. Paschen, Wied. Ann. 53. p. 821. 1894.

(Eingegangen 29. November 1900.)

#### 4. Bestimmung des selectiven Reflexionsvermögens einiger Planspiegel; von F. Paschen.

Ein mit Eisenoxyd bedecktes Platinstreifchen wurde elektrisch geglüht und sandte durch eine spaltförmige Oeffnung  $s$  eines Kastens Licht zum concaven Spiegel  $S$  von 70 cm Krümmungsradius, welcher ein reelles Bild des Spaltes  $s$  auf dem Spalt  $s_1$  meines Flusspat-Spectralapparates<sup>1)</sup> entwarf (vgl. Figur). Bei der Stellung  $A$  des Kastens gelangte das Licht direct zum Spiegel  $S_1$ , bei der Stellung  $B$ , nachdem es an dem



zu untersuchenden Planspiegel  $S_1$  reflectirt war. Der Einfallswinkel betrug bei der Anordnung 8,5 Grad. Der Kasten war an einem Arme eines Spectralapparates befestigt, mit dem er sich in die durch Anschläge fixirten Lagen  $A$  und  $B$  drehen liess. Der Spiegel  $S$  liess sich schnell in die für die Anordnung  $B$  richtige fixirte Lage bringen. Er stand auf dem Spectrometertischchen, welches mit den Spitzen seiner Füße in kleine Vertiefungen hineinpasste. Die Ebene des Planspiegels ward

in die Drehaxe hineinverlegt, und die Länge des Strahlenganges bei den Anordnungen  $A$  und  $B$  war genau die gleiche. Dies ist in dem an Absorptionen der Zimmerluft reichen ultraroten Spectraltheile zweckmässig. Der Spalt  $s$  war ein wenig grösser, als der Spalt  $s_1$ , sodass sein Bild sehr exact stets in derselben Weise justirt werden konnte. Es sind untersucht die Reflexionen verschiedener Silberspiegel und eines Neusilber spiegels: 1. ein Planspiegel I auf einer Feinsilberplatte, geschliffen und polirt von Zeiss. Eben solche Hohlspiegel be-

1) Die Breite des Bolometers betrug 3 Minuten im Spectrum.



nutzte ich im Spectrometer, deren Reflexion ich wissen wollte. 2. Eine frisch versilberte ebene Glasfläche II. Die dicke Versilberung war zwar noch ein wenig durchsichtig für Blau, wie die meisten versilberten Glasflächen, aber die Schicht war sehr gleichmässig und vorzüglich polirt. Aehnlich versilberte Glasspiegel sind häufig im Spectrobolometer verwendet. Ist die Versilberung neu, so sind sie in der Reflexion Vollsilberspiegeln wenig unterlegen, wie die Messungen zeigen. Drittens untersuchte ich einen genau ebensolchen versilberten Glasspiegel III, der aber 4 Jahre alt war, und dessen Silber schon die bekannte bräunliche Färbung zeigte, die alte Silberspiegel mit der Zeit erlangen. Die Reflexion dieses Spiegels ist bedeutend schlechter geworden. Der neusilberne Spiegel IV bestand aus derselben Legirung, aus der die Halbkugeln bestanden, welche ich zur Schwärzung der strahlenden und bestrahlten Flächen benutzte. Auch dieser Spiegel war von Zeiss vorzüglich ausgeführt.

$\lambda$	Vollsilberspiegel I			Versilberte Glasspiegel.		
	$R$	m. F.	Zahl d. Mess.	neu II		alt III
				$R$	Zahl d. Mess.	
0,7786	94,24	0,39	4	91,96	3	85,15
0,9104	95,43	0,15	4	94,38	2	86,48
1,096	96,45	0,14	5	96,04	3	88,25
1,329	97,30	0,11	5	97,27	1	89,50
1,718	97,70	0,11	4	97,50	2	90,94
2,204	97,97	0,19	4	97,95	2	91,91
3,842	98,18	0,14	4	98,08	2	93,58
4,810	98,23	0,18	4	98,13	2	94,06
6,264	98,40	0,08	6	98,20	3	95,47
7,737	98,69	0,24	4	98,46	2	96,17

$\lambda$  bedeutet die Wellenlänge in  $\mu$ ,  $R$  die reflectirte Strahlung in Procenten der einfallenden, m. F. den mittleren Fehler, Zahl d. Mess. die Anzahl der Messungsreihen, aus denen das Mittel und der mittlere Fehler berechnet ist. Bei Spiegel III ist jede Zahl das Resultat nur einer Messungsreihe (die aber aus etwa zehn Einzelbeobachtungen bestand). Die Galvanometerausschläge betrugen nie unter 100 Sct., und ein einziger Ausschlag war bis auf  $\frac{1}{2}$  Sct. genau.

## Neusilberspiegel.

$\lambda$	<i>R</i>	m. F.	Zahl d. Mess.	$\lambda$	<i>R</i>	m. F.	Zahl d. Mess.
0,7786	70,89	0,11	3	2,204	88,43	—	2
0,9104	72,44	0,10	3	3,842	91,80	—	2
1,096	76,16	0,06	4	4,810	92,53	—	2
1,329	80,67	0,06	3	6,264	93,17	0,18	3
1,718	85,05	0,09	3	7,737	94,03	—	2

Die Resultate für den Spiegel I schliessen gut an die Resultate der Herren Langley<sup>1)</sup>, E. Hagen und H. Rubens<sup>2)</sup> an. Auch sind sie in guter Uebereinstimmung mit den Resultaten von H. Rubens<sup>3)</sup>, welcher Messungen bis  $3\mu$  gemacht hat, und auch mit denen von Nichols<sup>4)</sup> bis  $9\mu$ . Sie sind ferner im Einklang mit der Annahme, dass bei den langen Wellen der Rubens'schen Reststrahlen die Reflexion des Silbers eine nahezu vollständige ist. Denn bei  $8\mu$  fand ich das Reflexionsvermögen bereits auf 98,7 Proc. gestiegen.

Die Reflexion des Silbers im Ultrarot nach verschiedenen Beobachtern.

$\lambda$ ( $\mu$ )	0,80	0,90	1,00	2,00	2,50	3,00	3,50
Rubens <sup>5)</sup> { I	94,2	95,1	96,3	97,2	96,3	98,0	—
II	96,3	96,5	96,8	97,4	97,8	98,3	—
Nichols <sup>6)</sup>	—	96,0	—	97,2	96,5	97,3	98,3
Paschen <sup>7)</sup>	94,83	95,48	96,04	97,88	98,04	98,12	98,16
$\lambda$ ( $\mu$ )	4,00	6,00	7,00	8,00			
Nichols	100	99,8	99,6	99,0			
Paschen <sup>7)</sup>	98,18	98,36	98,52	98,71			

Das Reflexionsvermögen steigt nach meinen Messungen für die vorzüglichen Spiegel I und II nicht ganz so schnell an, wie nach denen von Nichols.

1) S. P. Langley, Phil. Mag. 27. p. 10. 1889.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. Heft 10. p. 293. 1899.

3) H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 249. 1889.

4) E. F. Nichols, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1183—1196. 1896; Wied. Ann. 60. p. 401. 1897.

5) Hr. H. Rubens untersuchte zwei verschiedene Silberspiegel I u. II.

6) Hr. E. F. Nichols untersuchte einen Silber Niederschlag auf Glas.

7) Spiegel I, interpolirte Werte.

(Eingegangen 29. November 1900.)

5. *Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes;*  
*von Egon v. Schweidler.*

(Aus den Sitzungsberichten der k. Akad. d. Wissensch. in Wien; math.-naturw. Klasse (IIa) 109, Juli 1900.)

Bestimmungen der „Leitfähigkeit“ schlecht leitender flüssiger Dielektrica sind wiederholt ausgeführt worden, doch stimmen die Angaben verschiedener Beobachter so wenig überein, dass die Leitfähigkeit einstweilen kaum als charakteristische Constante einer solchen Substanz verwendet werden kann. Diese Nichtübereinstimmung mag teilweise an dem Umstande liegen, dass die flüssigen Dielektrica häufig chemisch nicht definirte Gemische verschiedener organischer Verbindungen sind (wie die meisten fetten Oele, Petroleum, Benzin u. dgl.), oder sich nur schwierig rein darstellen und in diesem Zustande beim Experimentiren erhalten lassen. Ausserdem hat es sich aber gezeigt, dass selbst bei einer gegebenen Probe einer Substanz der scheinbare Widerstand von Nebenumständen abhängt, indem das Ohm'sche Gesetz bei flüssigen Dielektricas nicht erfüllt ist.

Neben älteren Beobachtungen von Hertz<sup>1)</sup>, Quincke<sup>2)</sup> und anderen sind es hauptsächlich die Untersuchungen Koller's<sup>3)</sup>, die hierüber Aufschluss geben.

Koller maass den Widerstand einer von zwei parallelen Metallplatten begrenzten Schicht eines flüssigen Dielektricum, indem er diesen Condensator und einen bekannten grossen Widerstand hintereinander in den Kreis einer Batterie einschaltete und elektrometrisch den Potentialabfall im Conden-

1) H. Hertz, Wied. Ann. 20. p. 279. 1883.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 28. p. 529. 1886.

3) H. Koller, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 98. p. 201. 1899.

sator und im Vergleichswiderstande bestimmte. Die elektromotorische Kraft variierte bei seinen Versuchen zwischen  $\frac{1}{8}$  und 8 Daniells, die Elektrodendistanz zwischen einigen Zehntelmillimetern bis zu nahe einem Centimeter.

Die Ergebnisse seiner Beobachtungen waren kurz die folgenden: Die Stromstärke ändert sich mit der Zeit, sie nimmt unmittelbar nach Stromschluss rasch, späterhin langsamer ab, und es ist diese Aenderung stundenlang verfolgbar. Der Gegensatz zwischen dem raschen Absinken des Stromes in den ersten Sekunden und dem langsamen in der darauffolgenden Zeit ist bei manchen Substanzen sehr schroff, bei anderen weniger ausgesprochen, einzelne zeigen überhaupt nur geringe zeitliche Aenderungen.

Die Stromstärke ist nicht proportional der eingeschalteten elektromotorischen Kraft, sondern nimmt in geringerem Maasse zu als diese, wenigstens bei den von Koller angewendeten niedrigen Spannungen, während Quincke<sup>1)</sup> bei hoher Spannung das entgegengesetzte Verhalten beobachtet hatte.

Ebenso ist die Stromstärke bei constanter elektromotorischer Kraft und verschiedenen Schichtdicken nicht dieser umgekehrt proportional, sondern die scheinbare Leitfähigkeit nimmt mit der Elektrodendistanz zu.

Nach einer der Koller'schen im Principe gleichen Methode hat Naccari<sup>2)</sup> analoge Versuche angestellt. Im Gegensatze zu Koller findet Naccari nur geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze; ferner constatirt er ein rasches Anwachsen der Leitfähigkeit mit der Temperatur.

Da auch Koller in einzelnen Fällen nur geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze erhielt, sind Naccari's Resultate kein Gegenbeweis dafür, dass häufig, wenn auch nicht immer, unter noch nicht bekannten Bedingungen solche Abweichungen bestehen.

Gerade die Verhältnisse in einem derartigen Dielektricum scheinen mir eine grosse Analogie mit jenen eines ionisirten Gases (von Röntgen- oder Becquerelstrahlen durchsetzte Gase,

1) l. c.

2) A. Naccari, Nuov. Cim. (4) 8. p. 259. 1898; 11. p. 50. 1900.

Flammengase) zu zeigen. Auch bei diesen finden wir eine Abnahme der Leitfähigkeit infolge der Aufzehrung der freien Ionen, dieselbe Art der Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft und von der Elektrodendistanz, Erscheinungen, die durch die verschiedene Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen und durch die Störung des elektrischen Feldes infolge der Aufstauung derselben verständlich gemacht wurden.

Um diese Analogien weiter zu verfolgen, habe ich zunächst an Toluol Messungen angestellt; ich bediente mich der directen galvanometrischen Methode, die bei besser isolirenden Flüssigkeiten vielleicht versagt hätte, bei Toluol aber eine ziemliche Variation der elektromotorischen Kräfte zuließ und durch ihre Einfachheit nicht nur bequemer als die elektrometrische, sondern auch verlässlicher ist und rascheres Arbeiten ermöglicht.

Das verwendete Toluol war käufliches, „rectificirtes“; auf besondere Reinheit desselben legte ich keinen Wert, da es sich mir zunächst nicht um die Frage handelte, ob die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze bloss von Verunreinigungen (Staub, Wassergehalt u. dgl.) herrühren oder auch bei vollkommen reinen Substanzen auftreten, sondern nur darum, das Verhalten einer einmal gegebenen Substanz beim Durchgange eines elektrischen Stromes genauer festzustellen. In der That zeigte es sich, dass verschiedene Proben zwar ziemlich verschiedene Werte für die „Leitfähigkeit“ lieferten, dass aber die Aenderungen derselben mit der Durchströmungsdauer und anderen Nebenumständen in qualitativ gleicher Weise erfolgten.

Die Versuchsanordnung war die folgende:

In einer von der zu untersuchenden Flüssigkeitsprobe erfüllten Porzellanschale lagen parallel und horizontal die beiden Elektroden, gebildet durch Messingscheiben von circa 66 mm Durchmesser, die durch drei dazwischen gelegte isolirende Plättchen (entweder Quarzstücke von 1 mm oder Glasstücke von 3,1 mm Dicke) getrennt waren. Die eine Elektrode war über ein Galvanometer, eventuell über einen Kurzschluss der Galvanometerrolle dauernd zur Erde geleitet, die andere mit einem Punkte constanten Potentials verbunden, das zwischen 0 und + 300 Volt variirt und mittels eines Weston-

voltmeters auf ca. 1 pro mille genau gemessen werden konnte. Die Isolation der Quarz-, bez. Glasplättchen erwies sich als unendlich gross im Vergleiche zu der des Toluols. Das verwendete Galvanometer war ein hochempfindliches d'Arsonval'sches von Siemens & Halske; sein innerer Widerstand betrug  $10000\ \Omega$ , die Schwingungen waren fast aperiodisch gedämpft, sodass beim Oeffnen des die Galvanometerspule kurz schliessenden Schlüssels die Einstellung in die neue Ruhelage in ungefähr 20 Secunden erfolgte; der Reductionsfactor betrug  $5,00 \cdot 10^{-10}$  Ampère pro 1 mm einseitigen Ausschlages. Für einige Versuche wurde in die Zuführungen zu den Elektroden des zu messenden Widerstandes ein Commutator eingeschaltet, mittels dessen die Stromrichtung im Dielectricum umgekehrt werden konnte.

Was zunächst die Abnahme der Stromstärke mit der Durchströmungsdauer betrifft, so erhielt ich mit den Koller'schen übereinstimmende Resultate, wie aus den nachstehenden Tabellen hervorgeht, in denen einige charakteristische Versuchsreihen dargestellt sind.

Es bedeutet  $E$  die elektromotorische Kraft in Volt,  $d$  die Elektrodendistanz in Millimetern,  $t$  die Zeit in Minuten, vom Stromschluss an gerechnet,  $i$  die beobachtete Stromstärke in  $10^{-10}$  Ampère.

I.  $E = 300\text{ V.}, d = 1\text{ mm.}$ 

$t$	$i$
0	—
0,75	545
1	480
1,5	440
2	410
2,5	390
3	375
4	348
5	330
6	319
7	305
8	297
9	294
10	282
—	—

II.  $E = 200\text{ V.}, d = 1\text{ mm.}$ 

$t$	$i$
0	—
0,5	375
1	260
1,5	182
2	155
2,5	140
3	130
4	117
5	110
6	105
7	101
8	99
9	95
10	94
54	78



III.  $E = 10 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$

$t$	$i$
0	—
0,25	115
0,5	110
1	100
2	80
3	75
4	65
5	55
6	72
7	60
8	51
9	42
10	40

IV.  $E = 5 \text{ V.}$ ,  $d = 3,1 \text{ mm.}$

$t$	$i$
0	—
0,5	34
1	32
1,5	30
2	26
2,5	24
3	20
4	18
5	15
6	13
7	11
8	10
9	10
10	8
12	6
14	5

Man erkennt auch hier wieder, dass die procentuelle Abnahme der Stromstärke, also auch die ihr proportionale Abnahme der Leitfähigkeit, die ich kurz als „Ermüdung“ des Dielektricum's bezeichnen will, unmittelbar nach Stromschluss weit höhere Werte annimmt als später, ferner dass die „Ermüdung“ um so mehr in den ersten Secunden erfolgt, je höher die angewendete elektromotorische Kraft ist, bei kleinerer elektromotorischen Kraft aber gleichmässiger über einen längeren Zeitraum verteilt ist, was bereits von Koller behauptet wurde. Häufig (wie z. B. in Versuchsreihe III) kam ein vorübergehendes Anwachsen der Stromstärke vor, was wohl auf zufällige Störungen zurückzuführen sein dürfte.

Wird nach längerer Durchströmungsdauer die elektromotorische Kraft plötzlich ausgeschaltet und die Anode mit der Erde verbunden, so ist ein Polarisationsstrom nicht sicher nachweisbar, jedenfalls übersteigt seine Grösse nicht  $2 \text{ bis } 3 \cdot 10^{-10} \text{ A}$ ; eine durch Polarisation entstandene elektromotorische Gegenkraft beträgt somit höchstens ein Volt und kann weder die allmähliche Abnahme der Stromstärke, noch einige später erwähnte Erscheinungen erklären.

Wird die elektromotorische Kraft, nachdem sie einige Zeit ausgeschaltet war, wieder eingeschaltet, so ist in der Regel die Stromstärke grösser als vorher, sinkt aber wieder auf den

früheren Wert; auch diese Erscheinung ist bei Anwendung höherer Spannungen stärker ausgeprägt, bei niederen Spannungen oft nicht merkbar. Bereits Hertz<sup>1)</sup> erwähnt diese Thatsache und fasst sie auf als das Resultat der Uebereinanderlagerung der „rückstandbildenden“ und der „eigentlichen Strömung“. Da aber nach dem Obigen die den Rückstand liefernden Ströme galvanometrisch nicht messbar, also von anderer Grössenordnung sind, muss man wohl schlechthin ein Wiederanwachsen der Leitfähigkeit, eine „Erholung“ des Dielektricums in der stromlosen Periode annehmen, über deren Natur man sich die von der Theorie der Gasentladungen nahegelegten Vorstellungen bilden mag.

Zwei Beispiele für den Verlauf dieser Erscheinung geben die Tab. V und VI.

V.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$ 

$t$	$i$	$t$	$i$
0	—	26	286
0,25	365	[26—31;	$E = 0$
1	340	31,3	362
2	325	32	315
3	315	36	278
5	309	[36—36,5;	$E = 0$
[5—6;	$E = 0$	36,8	290
6,25	332	37,5	265
7	320	[68—69;	$E = 0$
10	306	69,3	65
[10—12;	$E = 0$	73	61
12,3	345	[73—75;	$E = 0$
13	325	75,3	68
15	307	77	64
[15—19;	$E = 0$	[77—107	$E = 0$
19,3	362	107,3	82
20	330	120	68

VI.  $E = 200 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$ 

$t$	$i$
0	—
1	125
2	114
5	107
10	100
68	60

VII.

$\tau = 0,5$	$\frac{\Delta i}{i} = 4,3 \text{ Proc.}$
1	7,5
2	12,7
4	18
5	27

1) H. Hertz, l. c.

In Tab. VII ist der Zusammenhang der durch die procentuelle Zunahme der Leitfähigkeit ( $\Delta i/i$ ) quantitativ festgesetzten „Erholung“ mit der Dauer der Erholungsperiode ( $\tau$ ) auf Grund der Versuchsreihe V dargestellt. Es zeigt sich analog wie bei der „Ermüdung“, dass die „Erholung“ hauptsächlich in der ersten Zeit stattfindet, später langsamer zunimmt.

Wird nach längerer Dauer des Stromes seine Richtung im Dielektricum umgekehrt, so erhält man zunächst eine bedeutend grössere Stromstärke als in der ursprünglichen Richtung, zugleich ist aber die zeitliche Abnahme derselben eine noch raschere als bei einem noch gar nicht vom Strome durchflossenen Dielektricum. Bei beliebig oft wiederholtem Umschalten zeigt sich diese Erscheinung immer wieder; ähnlich wie die Phänomene der „Ermüdung“ und „Erholung“ ist übrigens auch dieses um so auffallender, je grösser die angewandte elektromotorische Kraft ist.

Die Tab. VIII und IX enthalten die Resultate zweier aus anderen herausgegriffenen Versuchsreihen. *A* und *B* bezeichnen hierbei die beiden entgegengesetzten Stromrichtungen.

VIII.  $E = 200 \text{ V.}$

$t$		$i$
40	<i>A</i>	58
42	<i>B</i>	170
43	<i>B</i>	90
45	<i>B</i>	85
46	<i>A</i>	110

IX.  $E = 100 \text{ V.}$

$t$		$i$
0	<i>A</i>	77
11	<i>A</i>	41
12	<i>B</i>	107
16	<i>B</i>	60
17	<i>A</i>	115
22	<i>A</i>	47

Auch diese Erscheinung, die ja mit den Rückstandserscheinungen offenbar in nahem Zusammenhange steht, lässt sich aus den bereits erwähnten Gründen nicht einfach durch die Annahme erklären, dass zu einem gewöhnlichen Leitungsstrome ein Rückstandsstrom sich addire. Vielmehr scheint hier ein Analogon zu der unipolaren Leitfähigkeit der Gase vorzuliegen; ein durch die längere Wirkung eines Stromes ermüdetes Dielektricum zeigt, wenn auch nicht ein streng unipolares Leitvermögen, wie Gase unter bestimmten Bedingungen, doch eine beträchtliche Verschiedenheit der Werte seines Leitvermögens für entgegengesetzte Stromrichtungen.

Die Erscheinungen der „Ermüdung“ und „Erholung“ er-

schweren die Aufstellung quantitativer Beziehungen zwischen elektromotorischer Kraft und Stromstärke. Je nach der Reihenfolge, in der man von niederen zu höheren Spannungen oder umgekehrt fortschreitet und der Zeit, durch welche man diese Spannungen wirken lässt, kann man daher ziemlich verschiedene Formen für diese Abhängigkeit finden. Immerhin liess sich erkennen, dass die Werte, welche bei verschiedenen elektromotorischen Kräften die Stromstärken nach hinreichend langer Dauer nahezu constant beibehalten, nicht der elektromotorischen Kraft proportional sind, sondern hinter derselben zurückbleiben, was also ebenfalls mit Koller's Resultaten übereinstimmt.

Wenn die bisher besprochenen Eigentümlichkeiten flüssiger Dielektrica in ihrem Verhalten beim Durchgange eines elektrischen Stromes wirklich in Analogie mit der Theorie der Erscheinungen in ionisirten Gasen zu erklären sind, so müssen sich auch innerhalb eines durchströmten Dielektricum's freie positive und negative Ladungen nachweisen lassen. Dies ist mir mittels folgender Versuchsanordnung in der That gelungen.<sup>1)</sup>

Zwei Zinkblechplatten vom Formate  $9 \times 6$  cm standen in einem mit Toluol gefüllten Gefässe parallel und vertical in einer Distanz von 24 mm; die eine Platte war über das Galvanometer zur Erde abgeleitet, die andere blieb constant auf + 300 Volt geladen; der zwischen den Platten übergehende Strom betrug 250 bis  $190 \cdot 10^{-10}$  Ampère. Zwischen den beiden Platten war eine aus einem verticalen Platindrahte gebildete Sonde horizontal verschiebbar, deren Entfernung von den Elektroden auf 0,1 mm bestimmbar war, während ihr Potential an einem Exner'schen Elektroskope auf  $\pm 1$  Volt gemessen werden konnte. Die Resultate zweier Versuchsreihen sind in den Tab. X und XI angegeben, wo  $x$  die Entfernung der Sonde von der Kathode in Millimetern,  $V$  ihr Potential in Volt bedeutet. Für  $V$  sind in XI die Mittelwerte aus je drei bei abwechselnder Verschiebungsrichtung der Sonde gewonnenen Werten eingesetzt, wobei die maximalen Abweichungen vom Mittel 2 Volt betrugen. Nachstehende Textfigur stellt die Resultate graphisch dar.

1) Hr. Koller hat vor Jahren analoge Versuche mittels Tropfelektroden ausgeführt; über die Resultate derselben, die nicht publicirt wurden, konnte ich aber nichts näheres erfahren.

X.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 24 \text{ mm.}$

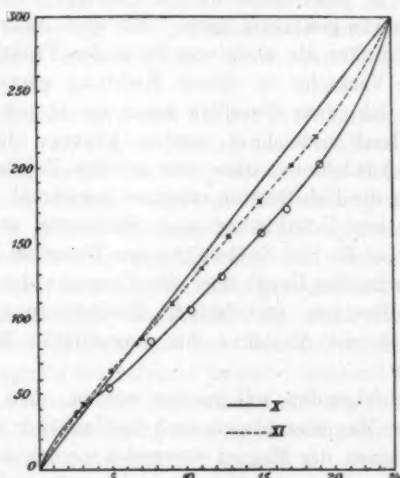
$$\frac{E}{d} = 12,5 \frac{\text{V.}}{\text{mm.}}$$

$x = 3$	$V = 41$
5	57
7,5	85
10	106
12,5	130
15	157
17	174
19	200

XI.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 24 \text{ mm.}$

$$\frac{E}{d} = 12,5 \frac{\text{V.}}{\text{mm.}}$$

$x = 3$	$V = 48$
5	66
7	88
9	110
11	132
13	156
15	177
17	200
19	222



Es ist deutlich zu erkennen, dass die Potentialgradienten an den Elektroden erhöht, in der Mitte dagegen erniedrigt sind, dass also in der Nähe der Anode freie negative, in der Nähe der Kathode positive Ladungen angehäuft sind.

Auf Grund dieser Ergebnisse dürfte der Schluss gerechtfertigt sein, dass die Analogien im Verhalten ionisirter Gase und flüssiger Dielektrica keine zufälligen, sondern im Wesen des Entladungsvorganges begründet sind.

Wien, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 7. November 1900.)

## 6. Ueber die Prüfung von Magnetstahlorten; von I. Klemenčič.

Die Untersuchung der Stahlorten hinsichtlich ihrer Eignung zur Anfertigung von Magneten ist ohne Zweifel von grosser praktischer Bedeutung. Es ist jedoch nicht zu leugnen, dass es derzeit kaum ein sicheres Verfahren giebt, mittels dessen man in jeder Hinsicht ein richtiges Urtheil über eine Magnetstahlorte gewinnen kann. Es sind zwar sowohl von Seite der Physiker als auch von Seite der Praktiker bez. der Fabrikanten Versuche in dieser Richtung gemacht worden; doch glaube ich, dass dieselben kaum als in jeder Beziehung zufriedenstellend bezeichnet werden können, da ihnen ein Factor, die Ausdehnung über eine gewisse Zeitdauer, abgeht. Insbesondere die Fabrikanten scheinen manchmal in besonders kurzer Zeit ein Urtheil über eine Stahlorte zu fällen. So schreibt mir z. B. Hr. Zellweger aus Uster bei Zürich, dass er, um ein schnelles Urtheil über die Constanz der Magnete zu gewinnen, dieselben mehrfachen Erschütterungen aussetzt und notirt, welche Abnahme das magnetische Moment hierdurch erfährt.

Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, dass für die Beurteilung einer Magnetstahlorte auch die Umstände maassgebend sind, unter denen der Magnet verwendet werden soll und dass eine bestimmte Magnetstahlorte nicht unter allen Verwendungsumständen die beste sein muss.

Die Bedingungen, unter welchen Magnete functioniren und ein constantes Moment bewahren sollen, sind im allgemeinen verschieden, lassen sich aber doch in zwei Hauptgruppen einordnen. Eine Reihe hat beim Gebrauche starke mechanische Erschütterungen, Abreissen des Ankers etc. zu ertragen; für Magnete, welche unter solchen Umständen zu functioniren haben, wird vielleicht die Methode Zellweger's branchbare Resultate liefern.

Ganz anders verhält sich die Sache bei Magneten, welche den Bedingungen der zweiten Hauptgruppe unterliegen. Hier



sollen die Magnete bei ziemlich ruhigem Lagern ihr Moment constant erhalten. Diesen Bedingungen unterliegen z. B. die Magnete bei erdmagnetischen und physikalischen Instrumenten, Normalmagnete zur Aichung von Galvanometern etc. Bei solchen Magneten ist die hauptsächlichste Ursache der Aenderungen des Momentes in den Temperaturschwankungen, wie sie durch den Wechsel der Jahreszeiten bedingt sind, zu suchen. Daraus folgt aber, dass man von diesem Gesichtspunkte aus ein grösseres Zeitintervall für die Beobachtungen heranziehen muss.

Es ist gar nicht einzusehen, warum eine Stahlsorte, die sich in einer Beziehung bewährt, auch in der anderen die besten Resultate liefern müsste. Dies ist in der That auch nicht der Fall.

Im allgemeinen wird man bei der Prüfung der Stahlsorten, bez. der daraus verfertigten Magnete ein Verfahren einschlagen müssen, wie man es bei der Untersuchung der Normalelemente angewendet hat. Hierbei bildet die Ausdehnung der Beobachtungen auf ein grosses Zeitintervall die Hauptrolle.

Um einen Beitrag zur Klärung der soeben erwähnten Punkte zu liefern, habe ich mit einer grossen Zahl von Magnetstäben Untersuchungen angestellt, die einen Zeitraum von mehr als einem Jahre umfassen. Ich untersuchte das Verhalten der Magnete bei ruhigem Lagern; während einer meiner Schüler, Hr. Krüse, die Probestücke auf die Constanz ihres Momentes bei starken Erschütterungen und sonstigen mechanischen Einflüssen untersuchte.<sup>1)</sup>

Die Untersuchung erstreckte sich auf Magnete verschiedener Provenienz. Die Probestücke wurden von verschiedenen Fabriken<sup>2)</sup> in gehärtetem Zustande bezogen und hier im Institute in dem homogenen Felde (600—700 abs. Einh.) einer stromdurchflossenen Spule magnetisirt. Für die vorliegende Frage sind insbesondere die Beobachtungen an einer Reihe von Stahlstäben der Firma „Böhler & Cie“ lehrreich. Diese

1) Vgl. I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Abt. IIa. 109. p. 242. 1900; C. Krüse, l. c. p. 195.

2) Von Böhler & Cie. in Wien, von Marchal in Paris, von Zellweger in Uster bei Zürich, von Remy in Hagen und von Berg in Berlin.

Firma lies mir in der coulantesten Weise eine Serie von 40 Stäben mit verschiedenen Dimensionsverhältnissen aus ihren Magnetstahlsorten anfertigen und besorgte auch deren Härtung nach ihrem eigenen Verfahren.

Die gelieferten Magnetstäbe trugen die Fabrikmarken „45“, „43“, „UI“, „0“ und „00“. Von jeder Marke waren acht Stäbe vorhanden. Sie hatten durchweg quadratischen Querschnitt und ihr Dimensionsverhältnis  $V$  (d. h. Verhältnis der Seite zur Länge) betrug entweder 10 oder 25 bei 4 oder 6 mm Seitenlänge.

Es waren also von jeder Marke folgende Dimensionen vorhanden:

Je zwei Stück zu 15 cm Länge und 6 mm Seite

„	„	„	„	6	„	„	6	„	„
„	„	„	„	10	„	„	4	„	„
„	„	„	„	4	„	„	4	„	„

Die Härtung dieser Magnete geschah Mitte April 1898, die Beobachtungen wurden anfangs Mai desselben Jahres aufgenommen.

Zunächst wurde die Constanz des Momentes bei ruhigem Lagern untersucht.

Die Bestimmung des Momentes erfolgte nach der magnetometrischen Methode aus der ersten Hauptlage.

Das Magnetometer samt den aus Metall verfertigten Ablenkungsstativen stand auf einer in die Wand eingemauerten Marmorplatte. Die Horizontalcomponente wurde mittels einer am Magnetometer angebrachten, in Paraffin ausgekochten Spule und mittels eines constanten Stromes (Clarkelement und Manganinwiderstände) controlirt. Die Magnete selbst lagerten ganz ruhig in einem Kasten in der Ost-Westlage und wurden nur zur Beobachtung herausgenommen und auf das Ablenkungsstativ gelegt.

Die Beobachtungen über die Abnahme des Momentes wurden sofort nach der Magnetisirung (etwa 2—3 Stunden danach) aufgenommen. Die nächste Beobachtung des Momentes erfolgte zwei Tage später, die dritte nach 6 Tagen, die vierte nach 13 und die fünfte nach 27 Tagen. Nach diesen 27 Tagen wurde in den Beobachtungen eine Pause gemacht und dieselben im Juli 1898 mit der halben Zahl dieser Magnete ohne neuerliche Magnetisirung

wieder aufgenommen. Die Magnete lagerten in dieser Zwischenzeit ganz ruhig an ihrem Orte. Was nun die Abnahme des Momentes in den ersten 27 Tagen nach der Magnetisirung anbelangt, so ergab sich dabei pro Magnet bei den einzelnen Marken eine mittlere Abnahme für die beiden Dimensionsverhältnisse wie folgt:

Marke	V = 25	V = 10
„UI“	1,25 Proc.	1,72 Proc.
„00“	1,06	1,20
„0“	1,01	1,19
„45“	0,69	0,85
„43“	0,72	0,89

Wenn man die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes während der ersten 27 Tage nach der Magnetisirung beurteilen wollte, würde sich also die Reihenfolge

„45“ „43“ „0“ „00“ „UI“

ergeben.

Für die weiteren Messungen wurde, wie schon erwähnt, eine Teilung der Magnete vorgenommen. Für die Beobachtungen der Abnahme bei ruhigem Lagern wurden nur 20 Stäbe beibehalten, indem von jedem Paar ein Stück ausgeschieden wurde. Mit den ausgeschiedenen Exemplaren wurden sodann die weiter zu besprechenden Versuche des Hrn. Krüse gemacht.

Die weiteren Beobachtungen laufen von Juli 1898 bis Ende October 1899. Die mittlere Abnahme pro Magnet ergibt sich während dieser Zeit bei den einzelnen Marken:

Marke	V = 25	V = 10
„UI“	1,87 Proc.	3,33 Proc.
„00“	1,65	3,84
„0“	1,58	3,80
„45“	1,35	2,95
„43“	1,51	3,21

Es resultirt daher in diesem Falle die Reihenfolge:

„45“ „UI“ „43“ „0“ „00“

für die Güte der untersuchten Sorten.

Aus diesen Beobachtungen folgt zunächst die Thatsache, dass für die Constanz des Momentes die grossen Dimensionsverhältnisse besser sind als die kleinen, was zu erwarten war.

Es geht daraus weiter hervor, dass eine Beobachtungsdauer von 27 Tagen noch nicht in allen Fällen ein richtiges Maass für die Beurteilung einer Stahlsorte liefert, wie das aus dem Verhalten der Marke „UI“ hervorgeht.

Es ist nicht uninteressant, die mittlere Abnahme in den ersten 27 Tagen pro Tag und Magnet zu berechnen. Es ergibt sich daraus folgende Tab. I:

Tabelle I.

Periode	Procentabnahme pro Tag und Magnet			
	I	II	III	IV
0.—2. Tag	0,141	0,134	0,086	0,077
2.—6. „	0,039	0,046	0,029	0,047
6.—13. „	0,034	0,058	0,029	0,049
13.—27. „	0,030	0,031	0,021	0,021

Dabei sind eingetragen die Magnete unter

I	mit 15 cm Länge,	6 mm Seite,	$V = 25$
II	„ 6 „ „	6 „ „	$V = 10$
III	„ 10 „ „	4 „ „	$V = 25$
IV	„ 4 „ „	4 „ „	$V = 10$ .

Die Abnahme des Momentes ist in den ersten zwei Tagen nach der Magnetisirung besonders gross; von da an hält sie sich auf einem viel niederen und langsam sinkenden Niveau. Diese Thatsache spricht ganz deutlich für das Vorhandensein von zwei Ursachen für die Abnahme des Momentes, wovon die eine in den durch die Magnetisirung hervorgerufenen Nachwirkungsdeformationen, die andere aber in sonstigen durch die vorausgegangene Härtung bedingten langsamen Umsetzungen in der Structur des Metalles liegt.<sup>1)</sup>

Einen Teil der Böhler'schen Magnete (Seitenlänge = 6 mm,  $V = 25$ ) hatte ich auch nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt und sodann deren Verhalten ein Jahr lang beobachtet. Es ergab sich bei allen Marken eine ausserordentlich geringe Abnahme, welche im ersten Jahre nach

<sup>1)</sup> Vgl. I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Abt. IIa. 109. p. 327. 1900.

der Magnetisirung bei den besten Böhler'schen Stahlsorten etwa 0,1 Proc. und darunter beträgt.

Hr. Krüse untersuchte mehrere Böhler'sche und auch andere Magnete hinsichtlich ihres Verhaltens bei Erschütterungen, indem er sie aus verschiedenen Höhen (1 und 1,94 Meter, in einigen Fällen auch 9,6 Meter) auf eine Marmorplatte fallen liess und sodann die Abnahme ihres Momentes bestimmte; auch brachte er die Magnete vielfach mit Eisenstäben und Eisenplatten in Berührung und untersuchte auch den Einfluss dieser Umstände auf die Constanz des Momentes. Schliesslich bestimmte er die Magnetisirungscurven einiger der untersuchten Stäbe, berechnete hieraus die Coercitivkraft und prüfte danach den Zusammenhang zwischen dieser und der Abnahme des Momentes nach Erschütterungen etc.

Krüse's Beobachtungen liefern das Resultat, dass die Verluste nach Erschütterungen um so grösser ausfallen, je kleiner die Coercitivkraft ist. Folgende Daten kennzeichnen diese Thatsache; sie beziehen sich auf Böhler'sche Magnete von  $V = 25$  bei 6 mm Seite.

Marke	„0“	„00“	„UI“	„43“	„45“
Coercitivkraft	84	76	63	59	57
Abnahme in Proc.	3,5	5,4	5,5	5,9	6,7

Versuche mit den gleichen Marken aber mit Stäben von 4 mm Seite und  $V = 25$  ergaben das gleiche Resultat.

Will man also die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes bei Erschütterungen beurteilen, so ergiebt sich aus den Beobachtungen Krüse's für die Böhler'schen Marken die Reihenfolge:

„0“ „00“ „UI“ „43“ „45“,

während meine Beobachtungen für die Güte der Stahlsorten bei ruhigem Lagern die Reihe

„45“ „UI“ „43“ „0“ „00“

ergeben.

Die beiden Reihen laufen zwar nicht ganz entgegengesetzt, jedoch folgt aus ihnen ganz deutlich, dass Magnete, welche sich bei Erschütterungen als besonders gut erweisen, bei ruhiger Lagerung durch längere Zeit die geringste Constanz des Momentes erwarten lassen. Diese Thatsache wird durch

das Verhalten eines Magnetes von Zellweger noch besonders bekräftigt. Dieser Magnet (rund, Durchmesser = 8 mm,  $V = 12,5$ ) zeigte nach Erschütterungen unter allen untersuchten Magneten die geringste Abnahme, bei ruhigem Lagern verlor er jedoch in acht Monaten 8,7 Proc. seines Momentes, eine Abnahme des Momentes, welche jene der übrigen untersuchten Magnete weitaus übertrifft.

Im allgemeinen wird man danach den Satz aussprechen können, dass bei ruhiger Lagerung Magnete mit kleiner Coercitivkraft bessere Resultate ergeben als solche mit grosser. Danach müsste eigentlich weiches Eisen unter Umständen die besten permanenten Magnete liefern. Vorläufige Orientierungsversuche haben in der That ergeben, dass weiches Eisen den remanenten Magnetismus zeitlich überraschend gut festhält, sobald man nur jede Erschütterung des Probestabes vermeidet.

Innsbruck, im November 1900.

(Eingegangen 21. November 1900.)



### 7. Bestimmung der Wechselzahl eines Wechselstromes; von R. Wachsmuth.

Hr. Samojloff<sup>1)</sup> hat kürzlich unter demselben Titel einen einfachen Weg zur Bestimmung einer Wechselzahl angegeben. Eine verwandte Methode ist von mir in letzter Zeit benutzt worden. Das Gebiet ihrer Anwendbarkeit ist wohl ein kleineres, sie hat aber vielleicht den Vorzug noch grösserer Einfachheit.

Eine Uhrfeder wird an ihrem einen Ende in einen kleinen Feilkloben gespannt, das andere Ende trägt, mit etwas Klebwachs befestigt, ein kleines weisses Papierquadrat. Bringt man die Feder durch Zupfen in Schwingung und beleuchtet mit Wechselstromlicht, so wird das weisse Quadrat still zu stehen scheinen, wenn die Schwingungszahl der Wechselzahl entspricht.

Die Schwingungszahl eines einseitig befestigten rechteckigen Stabes von der Dicke  $e$  und der Länge  $l$  beträgt, wenn  $v$  die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Metall bedeutet:

$$N = \frac{1,028}{6,36} \frac{e \cdot v}{l^2}.$$

Für Uhrfedern hat die Schallgeschwindigkeit in Stahl  $v = 4900$  m stets gut übereinstimmende Werte geliefert. Die Richtigkeit des angenommenen  $v$ -Wertes wurde geprüft durch Abstimmung der Federn nach dem Gehör auf Stimmgabeltöne von 32 bis 128 Schwingungen. Aber auch für schwere Stahlstäbe gilt der Wert noch, wie der Vergleich mit einer Stimmgabel von 435 Schwingungen lehrte.

Giebt man  $e$  in Millimeter,  $l$  in Centimeter an, so ist:

$$N = \frac{1,028 \cdot 4,9}{0,000636} \frac{e}{l^2} = 7920 \cdot \frac{\text{Dicke in mm}}{\text{Quadrat der Länge in cm}}.$$

Die Dicke  $e$  wird einfach mit der Mikrometerschraube gemessen. Die Länge  $l$  bedarf jedoch bei leichten Federn noch



1) A. Samojloff, Ann. d. Phys. 3. p. 353. 1900.

einer Correctur. Hat man niedrige Unterbrechungszahlen — wie bei den Inductorien mit Wagner'schem Hammer —, so kann man schwere Federn benutzen, die so dick und breit sind, dass die Belastung mit einem Papierscheibchen nicht mehr in Frage kommt. Man hat dann gegenüber dünneren Federn die grössere Länge voraus und erreicht eine leichtere und genauere Einstellung. Für *grössere* Wechselzahlen — zu denen schon 80—100 Wechsel pro Secunde zählen — kann man jedoch nur noch dünne und schmale Federn brauchen, weil nur diese (wegen der grösseren Elasticität) die erforderliche Schwingungsweite und mässige Dämpfung besitzen. Dann wird aber selbst die Belastung mit einem Papierscheibchen nicht mehr zu vernachlässigen sein und es muss eine Correctur auf den unbelasteten Stab eintreten.

Die Correctur bestimmt sich leicht durch Vergleich des belasteten Federstückes mit einem unbelasteten Stück derselben Feder, das man in einen Schraubstock klemmt. Man wählt eine oder mehrere beliebige Tonhöhen des unbelasteten Stabes und stimmt den belasteten nach dem Gehör auf diese ab. Die constante Längendifferenz ergibt die nötige Correctur. Da bei kürzeren Längen die Tonhöhe sich schneller ändert, so ist für Uhrfedern von 0,1—0,2 mm Dicke eine Länge von etwa 2—3 cm am günstigsten.

Schliesslich ist bei Inductorien noch durch Versuch zu ermitteln, ob auch der Schliessungsstrom eine genügend helle Leuchterscheinung hervorruft. Bei kleinen Inductorien ist das zumeist nicht der Fall. Dann ist natürlich die beobachtete Schwingungszahl gleich der Unterbrechungszahl d. h. Periodenzahl, während für den Wechselstrom einer Dynamo das Resultat immer die Wechselzahl giebt.

Als Lichtquelle wurde zumeist eine Funkenstrecke benutzt, jedoch ist für Inductorien das Licht von Geissler'schen Röhren wesentlich bequemer. Der niedrig gespannte (15 Volt) Strom eines Gleichstrom-Wechselstromumformers wurde durch die Primärrolle eines Inductoriums geschickt und so auf die für Funkenspiel nötige Spannung transformirt.

Der Versuch gestaltet sich demnach folgendermaassen: Die einseitig mit einem Papierquadrat belastete Uhrfeder wird zunächst ziemlich kurz in den Feilkloben gefasst und auf die Tonhöhe einer zweiten, ganz gleichartigen, aber unbelasteten

Feder abgestimmt. Falls eine Längendifferenz auftritt, wird diese als Correctionsglied notirt. Dann wird die belastete Feder so lang gefasst, dass sie sicher zu langsam schwingt, das Papierquadrat der Wechselstrombeleuchtung ausgesetzt, und die Feder durch Zupfen in Schwingung gebracht. Bei zunehmender Verkürzung lassen sich dann in drei- und zweifachen Bildern die tieferen Octaven beobachten. Tritt zum ersten Mal nur ein Bild auf, so stimmen Funkenzahl und Schwingungszahl nahe überein. Das Quadrat scheint sich erst schnell, dann langsamer hin und her zu bewegen, bis es schliesslich still steht. Ein völliges Stillstehen wird man nur bei sehr regelmässigen Unterbrechungen erhalten, immer aber lässt sich mit Sicherheit auf die langsamste Bewegung einstellen, da die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung bei weiterer Verkürzung wieder zunimmt.

Nun wird die Länge der Feder gemessen, das Correctionsglied für die Länge hinzuaddirt und nach der angegebenen bekannten Formel die Schwingungszahl berechnet.

Häufig, namentlich bei schnelleren Schwingungen, ist es von Vorteil, nachdem man den Grundton bestimmt hat, diesen durch Mitbenutzung der tieferen Octaven zu corrigiren, weil bei diesen die Federlänge eine grössere, die Aenderung der Tonhöhe mit der Länge eine langsamere und daher die Genauigkeit eine bessere ist. Aber auch höhere Octaven können zur Controle dienen.

Ich lasse einige Beispiele mit Variation der benutzbaren Möglichkeiten folgen.

A. Kleines Inductorium (ziemlich constant laufend) mit Hammerunterbrecher.

1. Feder einer Zugklingel, 28 mm breit;  $e = 0,82$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.
- 2 Bilder (tiefere Octave)  $l = 23,8$  cm  $\frac{1}{2} N = 11,5$   $N = 23,0$
- 1 Bild (Grundton)  $l = 17,1$  „  $N = 22,5$
2. Uhrfeder, 7 mm breit;  $e = 0,42$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.
- 1 Bild (Grundton)  $l = 12$  cm  $N = 23,2$
- 1 „ (höhere Octave)  $l = 8,7$  cm  $2 N = 44$   $N = 22$
3. Uhrfeder, 22 mm breit;  $e = 0,26$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.
- 2 Bilder (tiefere Octave)  $l = 13,85$  cm  $\frac{1}{2} N = 10,7$   $N = 21,4$
- 1 Bild (Grundton)  $l = 9,8$  „  $N = 23,8$
4. Uhrfeder, 1,5 mm breit;  $e = 0,15$  mm; Längencorr.  $\lambda = + 0,15$  cm.
- 1 Bild (Grundton)  $l = 7,1 + \lambda = 7,25$  cm  $N = 22,6$

B. Gleichstrom-Wechselstromtransformer, bei 5 etwas gebremst, bei 6 und 7 volle Tourenzahl.

5. Uhrfeder, 1 mm breit;  $e = 0,18$  mm; Längencorr.  $\lambda = + 0,20$  cm.

2 feste Bilder, drittes bald mit 1, bald mit 2 in Deckung	} $t_{\text{corr.}} = 6,75$ cm	$\frac{1}{2} N = 31,4$	$N = 94,2$
2 Bilder		$\frac{1}{2} N = 46,5$	$N = 93,0$
1 Bild			$N = 93,7$

6. Dieselbe Feder.

$$l = 3,63 \text{ cm} \quad N = 100,8$$

7. Feder von Versuch 4 (wegen Steifheit mühsam einzustellen).

$$l = 4,5 \text{ cm} \quad N = 100,2$$

C. Grosses Inductorium von 40 cm Schlagweite mit Deprezunterbrecher.

8. Feder von Versuch 5. (Benutzt: Teslaanordnung. Beleuchtungsquelle: die Funken der Leydener Flaschenentladung.)

$$l = 3,45 \text{ cm} \quad N = 101,8$$

9. Dieselbe Feder, Beleuchtung durch Geissler'sche Röhre, giebt die doppelte Zahl.

Da bei Versuch 9 nicht nur Oeffnungs-, sondern auch Schliessungsfunken Leuchten hervorrief und letzteres viel schwächer ist, so sah man bei  $l = 3,45$  cm zwei Bilder, ein sehr helles und ein schwaches. Dagegen gelang es nicht mehr, ein Bild allein einzustellen.

Hierdurch ist die Grenze der Methode gegeben: Ueber ca. 150 Schwingungen hinaus wird die Methode unbrauchbar, weil die Federn zu starr werden. Dagegen ist sie zwischen 1 und 100 Schwingungen äusserst bequem, weil sie ohne Messung von Zeiten oder Umdrehungszahlen mit grosser Schnelligkeit die Schwingungszahl zu messen gestattet.

(Eingegangen 8. December 1900.)

## 8. Ueber Temperaturen in Geissler'schen Röhren<sup>1)</sup>; von K. Kerkhof.

§ 1. Die ersten Gesetze über die durch Entladungen in Geissler'schen Röhren hervorgerufenen Erwärmungen rühren von G. Wiedemann<sup>2)</sup> her. Mit Hülfe eines Thermoelementes, das er aussen an die Capillarröhren bringt, findet er, dass „Röhren von verschiedenem inneren, aber gleichem äusseren Durchmesser in gleichen Zeiten durch die Entladungen einer Influenzmaschine nahezu gleiche Wärmemengen erhalten.“

Dieses Wiedemann'sche Gesetz ist späterhin durch die calorimetrischen Messungen von Naccari und Bellati<sup>3)</sup>, von E. Wiedemann<sup>4)</sup> und Neesen und Paalzow<sup>5)</sup> bestätigt worden; auch führen die Messungen des Potentialgradienten in verschieden weiten Geissler'schen Röhren von A. Herz<sup>6)</sup>, E. Wiedemann und G. C. Schmidt<sup>7)</sup>, wie das Joule'sche Gesetz, wenn man die von Hittorf<sup>8)</sup> gefundene Gesetzmässigkeit zwischen Leitungsvermögen und Stromdichtigkeit berücksichtigt, zu dem Ergebnis, dass die vom Strome in einer bestimmten Zeit erzeugte Wärmemenge von dem Röhrenquerschnitt unabhängig ist.

Unter Zugrundelegung der calorimetrischen Messungen sind nun die Temperaturen, die Gase bei dem Durchgang des Stromes in verschieden weiten Röhren annehmen, berechnet worden. E. Wiedemann<sup>9)</sup>, Neesen und Paalzow<sup>10)</sup> kommen

1) Auszug aus der Bonner Dissertation mit Zusatz.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 158. p. 57. 1876.

3) A. Naccari u. M. Bellati, Beibl. 2. p. 720. 1878.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 202. 1880; 20. p. 758. 1888.

5) F. Neesen u. A. Paalzow, Verhandl. d. Gesellsch. Deutscher Naturf. u. Aerzte, 63. Versamml. Abt. II. p. 51. 1890; Wied. Ann. 56. p. 275. 1895.

6) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 244. 1895.

7) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 314. 1898.

8) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 629. 1879.

9) E. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 298. 1879.

10) F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. 56. p. 276. 1895.

hierbei zu dem Ergebnis, dass ein Gas in einer Geissler'schen Röhre mit grösserem Durchmesser weit unter  $100^{\circ}$  bereits leuchten kann, während in engen Capillaren Temperaturen über  $100000^{\circ}$  herrschen müssen, der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gezogenen Folgerung gemäss, wonach die Temperaturen sich umgekehrt proportional wie die Röhrenquerschnitte verhalten.

Gegen die hohen Temperaturen, die Gase in den engen Capillaren nach den calorimetrischen Messungen annehmen sollen, sprechen aber die Beobachtungen von Hittorf<sup>1)</sup> und Stark.<sup>2)</sup> Da weiterhin Messungen von de la Rive<sup>3)</sup>, Hasselberg<sup>4)</sup>, Goldstein<sup>5)</sup> und Wood<sup>6)</sup>, die mit Hülfe von Temperaturmessapparaten innerhalb der Geissler'schen Röhre ausgeführt wurden, zum grössten Teil Temperaturen ergaben, die weit unter  $100^{\circ}$  lagen, so ging ich zunächst in der vorliegenden Arbeit davon aus, mit Hülfe eines Bolometers zu prüfen, ob der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gefolgerte Schluss, dass die Temperaturen der Gase in verschiedenen weiten Geissler'schen Röhren den Querschnitten der Röhren umgekehrt proportional sind, richtig ist.

§ 2. Die Apparate bestanden ausser der Geissler'schen Röhre, die mit einer Töpler'schen Quecksilberluftpumpe in Verbindung stand, aus dem Temperaturmessapparat und aus der Stromquelle, deren Entladungen durch die Geissler'sche Röhre hindurchgingen. Der Temperaturmessapparat bestand nach dem Verfahren von R. W. Wood<sup>7)</sup> aus einem verschiebbaren Bolometer, das einen der vier Zweige einer Wheatstone'schen Brücke bildete; als Bolometerdraht wurde ein etwa 1,5 cm langer Platindraht von 0,025 mm Durchmesser benutzt. Als Stromquelle für die Wheatstone'sche Brückenordnung diente ein Accumulator mit gewöhnlich 200 Ohm Vorschaltwiderstand; der Ausschlag des mässig astasirten Wiedemann's-

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 106. 1884.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 2. p. 424. 1900.

3) de la Rive, Pogg. Ann. 131. p. 577. 1867.

4) B. Hasselberg, Mém. de l'ac. de Péterbourg (IV) 18. p. 1. 1879.

5) E. Goldstein, „Elektrische Abstossung“, p. 175. Berlin 1880.

6) R. W. Wood, Wied. Ann. 59. p. 238. 1896.

7) l. c.



schen Galvanometers wurde durch ein Fernrohr, das etwa 2 m von dem Spiegel der Nadel entfernt war, abgelesen; es zeigte sich, dass einer Temperaturerhöhung um  $1^{\circ}\text{C}$ . des Bolometerdrahtes bei einer Stromstärke von etwa 0,005 Amp. 4 Sct. entsprachen, sodass man die  $\frac{1}{8}$ -Grade noch sehr genau ablesen konnte.

Da mir keine constante Batterie zur Verfügung stand, so wurden die Versuche mit einem Ruhmkorff ausgeführt, der so weit vom Galvanometer aufgestellt war, dass er keinen störenden Einfluss auf letzteres ausüben konnte.

Als Gase wurden  $\text{CO}_2$ , O, H und Luft benutzt.

§ 3. Die ersten Versuche bezogen sich darauf, die Temperaturen des positiven Lichtbüschels für verschiedene Gase in Röhren verschiedener Lichtweite zu ermitteln. Vor jeder Messungsreihe vergewisserte man sich durch Ausschalten der Bolometerstromquelle, dass eine Ablenkung der Galvanometernadel nur durch die Erwärmung des Bolometerdrahtes veranlasst wurde. Beobachtete man die Ablenkung der Galvanometernadel von dem Augenblick an, wo der Strom durch die Geissler'sche Röhre hindurchging, so bemerkte man zunächst eine erhebliche Ablenkung, bis nach einigen Minuten das Maximum der Ablenkung eingetreten war, bei welchem wir annehmen können, dass der Wärmezustand im Geissler'schen Rohr stationär ist, dass also ebensoviel Wärme im Entladungsrohr erzeugt wird, als nach aussen an die Glaswand und an die Luft abgegeben wird. Der Galvanometeraussschlag blieb bei niedrigem Drucke in der Geissler'schen Röhre constant, während bei den höheren Drucken von etwa 7 mm an geringe Schwankungen der Galvanometernadel eintraten. Die Messungen ergaben, dass die Temperaturen im positiven Lichtbüschel bei Verminderung des Druckes geringer werden, um vom kritischen Drucke an wieder schnell anzuwachsen<sup>1)</sup>, und zwar sind die Temperaturen bei demselben Drucke für  $\text{CO}_2$  grösser, als die für Luft, diese erheblich grösser als die Temperaturen bei der Entladung durch Wasserstoff; dieses Verhältniss ändert sich jedoch von Druck zu Druck. Temperaturcurven, die in Röhren

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 236. 1880 und 20. p. 757. 1883; A. Naccari u. G. Guglielmo, Att. di Torino 19. p. 9. 1884.

mit dem inneren Durchmesser 2,5, 2, 1,5 und 1,3 cm ermittelt wurden, liessen bei den complicirten Verhältnissen des Inductoriums keine Gesetzmässigkeit zwischen Temperatur und Röhrenquerschnitt erkennen, doch sind die Temperaturen bei weitem nicht umgekehrt proportional den Querschnitten der Röhren. Um den Entladungsprocess des Inductoriums für verschiedene Röhrenquerschnitte möglichst einheitlich zu gestalten, wurde bei den folgenden Messungen eine Röhre mit verschiedenen Querschnitten benutzt; dieselbe hat eine Länge von 50 cm und war aus 5 Röhren von 5, 4, 3, 2 und 1,5 cm Durchmesser zusammengesetzt. Die Temperaturen, die das Bolometer in den verschiedenen Querschnitten der Röhre anzeigt, werden nur dann genau die Abhängigkeit von dem Querschnitte angeben, wenn sie in der positiven Entladung bei den verschiedenen Entfernungen von den Elektroden constant bleiben. Da die Temperaturcurve vom dunklen Trennungsraume nach dem positiven Lichtbüschel hin stark ansteigt, in dem positiven Lichtbüschel annähernd horizontal bleibt, um in der Nähe der Anode wieder abzufallen, so können nur in jenen Theilen der Röhre Messungen angestellt werden, die hinlänglich weit von dem dunklen Trennungsraum und der Anode entfernt sind, und zwar war die Röhre so zusammengesetzt, dass die grössten Werte der Temperaturcurve des positiven Lichtbüschels in den engsten Querschnitten der Röhre liegen, sodass die unten angeführten Temperaturen für die engsten Röhren im Vergleich mit den Temperaturen für die weiten etwas zu hoch sein können.

Die Zahlen in den Columnen rechts bei den folgenden Reihen bilden das Mittel aus 3 bis 4 an verschiedenen Stellen jedes etwa 6—7 cm langen Röhrenabtheiles gemachten Messungen; es seien hier nur einzelne Reihen angeführt:

## a) Luft 3,2 mm.

Durchmesser	4 cm	20,75
"	2 "	34
"	1,5 "	42

## c) Wasserstoff 5,3 mm.

Durchmesser	4 cm	33,5
"	2 "	50,2
"	1,5 "	59,5

## b) Luft 1,6 mm (geschichtet).

Durchmesser	4 cm	15,2
"	2 "	24,6
"	1,5 "	28,9

## d) Wasserstoff 3,1 mm.

Durchmesser	4 cm	24,5
"	2 "	35,2
"	1,5 "	43,2

Um eine grössere Unterbrechungszahl zu erhalten, sind noch einige Messungen mit einem Wehneltunterbrecher bei einer Klemmspannung von etwa 70 Volt gemacht worden.

## e) Wasserstoff 3,5 mm.

Durchmesser	4 cm	29
"	2 "	49,1
"	1,5 "	63,5

## f) Wasserstoff 2,3 mm.

Durchmesser	4 cm	31
"	2 "	49,8
"	1,5 "	72

Bei der folgenden Reihe wird das Inductorium durch acht Accumulatoren angeregt; es geht hier der Oeffnungs- und und Schliessungsfunke über:

## g) Wasserstoff 2,2 mm.

Durchmesser	5 cm	30,6
"	4 "	33
"	2 "	46,8
"	1,5 "	61,8

Der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gezogene Schluss, dass die Temperaturen sich umgekehrt proportional den Röhrenquerschnitten verhalten, steht mit den vorhergehenden Messungen in Widerspruch.

Das Wiedemann'sche Gesetz beruht auf Bestimmungen der Wärmemenge, die von einem Entladungsschlage herrührt; man könnte also den obigen Messungen den Einwurf machen, dass die Entladungen eines Inductatoriums benutzt worden sind, die nur nach gewissen Zeiträumen durch die Geissler'sche Röhre hindurchgehen; das Bolometer müsste demnach, vorausgesetzt, dass das Verhältnis der zwischen den einzelnen Entladungen verstrichenen Zeit zu der Entladungsdauer sehr gross ist, eine Temperatur anzeigen, die notwendig kleiner sein müsste als die Temperatur, welche das Gas bei seinem Aufleuchten hatte.<sup>1)</sup> Einer continuirlichen Entladung werden wir aber um so näher kommen, je grösser wir die Zahl der Unterbrechungen des primären Stromkreises des Inductatoriums machen. Nach den vielfachsten Messungen lassen aber selbst gesteigerte Unterbrechungszahlen — Wagner'scher Hammer, Deprez- und Wehneltunterbrecher — keine wesentlichen Unterschiede erkennen.

1) B. Hasselberg, l. c.

§ 4. Da das Wiedemann'sche Gesetz, dass die vom Strome erzeugte Wärmemenge vom Röhrenquerschnitt unabhängig ist, nach vielen Untersuchungen als richtig sich erwiesen hat, so lassen sich die oben experimentell gefundenen Temperaturen in den verschiedenen Querschnitten nur dann mit dem Wiedemann'schen Gesetze vereinbaren, wenn wir annehmen, dass während der Entladung Wärme an die Glaswand bez. Luft abgegeben wird.

Wie weit dieses zutrifft, soll im Folgenden, sowohl unter Zugrundelegung der G. Wiedemann'schen Versuche<sup>1)</sup>, als auch aus dem auf elektrostatischem Wege gefundenen Gesetze, dass der Potentialgradient in Röhren verschiedener Lichtweite im positiven Lichtbüschel gleich gross ist, gezeigt werden.

1. Lässt man durch eine Geissler'sche Röhre einen elektrischen Strom hindurchgehen, so wird bald ein Zeitpunkt eintreten, wo ebensoviel Wärme in der Röhre erzeugt wird, als nach aussen an die Glaswand bez. an die Luft abgegeben wird; der Wärmezustand der Geissler'schen Röhre ist stationär.

Die Fourier'sche Wärmegleichung

$$(1) \quad \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

wird in diesem Falle

$$(2) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

da  $T$  von der Zeit  $t$  unabhängig ist. Wir legen nun die  $z$ -Axe des Coordinatensystems mit der Axe des Rohres zusammen; der Wärmestrom ist dann der  $xy$ -Ebene parallel und in einiger Entfernung von den Rohrenden von  $z$  unabhängig, demnach

$$(3) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{dT}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{dT}{dr} \cdot \frac{x}{r^2},$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} d \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (\text{nach Gl. 3}),$$

$$(4a) \quad \frac{dT}{dr} = \frac{c}{r},$$

$T = c \log r + c'$  ist somit ein Integral von Gleichung (3).

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 128. p. 57. 1876.

Setzen wir

$$T_1 = c \log r_1 + c',$$

$$T_2 = c \log r_2 + c',$$

so wird bei der Elimination von  $c$  und  $c'$ :

$$(5) \quad T = (T_1 - T_2) \frac{\log r - \log r_1}{\log r_1 - \log r_2} + T_1.$$

Demnach

$$(6) \quad \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{r(\log r_1 - \log r_2)}.$$

Für den Wärmestrom  $U$  in der Richtung  $r$  haben wir die Gleichung

$$(7) \quad U = -k \frac{dT}{dr},$$

wo  $k$  das Wärmeleitungsvermögen bedeutet, nach Gleichung (6) also:

$$(8) \quad U = \frac{k(T_1 - T_2)}{r(\log r_2 - \log r_1)}.$$

Die Wärmemenge, welche längs der Peripherie des Kreises vom Radius  $r$  durch die Längeneinheit des Rohres ausströmt, ist:

$$(9) \quad 2\pi r U = \frac{2\pi k(T_1 - T_2)}{\log r_2 - \log r_1},$$

wo  $T_1$  und  $T_2$  die Temperaturen in den Kreisperipherien vom Radius  $r_1$  und  $r_2$  bedeuten. Aus Gleichung (9) folgt, dass für eine Geissler'sche Röhre mit dem inneren Radius  $r_1$  und dem äusseren  $r_2$  die Temperatur an der inneren Glaswand  $T_1$  sich berechnet zu:

$$(10) \quad T_1 = \frac{r_2 U}{k} (\log r_2 - \log r_1) + T_2,$$

wo  $k$  das Wärmeleitungsvermögen des Glases und  $T_2$  die Temperatur an der äusseren Glaswand bedeutet.

Um nun aus der an der inneren Glaswand eintretenden Wärmemenge und der dort herrschenden Temperatur  $T_1$  einen Schluss auf die mittlere Temperatur des Gases zu machen,

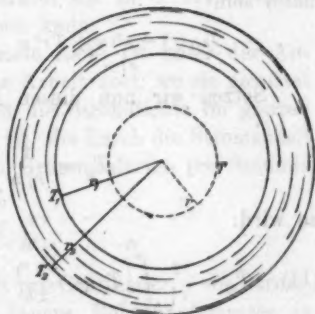


Fig. 1.

denken wir uns einen mit dem Rohre concentrischen Gas-cylinder vom Radius  $r$  und der Höhe der Längeneinheit, in welchem überall die constante Temperatur  $T$  herrscht, und von dem durch Leitung durch die übrige Gasschicht an der inneren Glaswand in das Glas eine bestimmte Wärmemenge eintritt.

Die mittlere Temperatur, die die „Gasröhre“ infolge der Wärmeleitung angenommen hat, ist:

$$\begin{aligned} T_{rr_1} &= \frac{1}{(r_1^2 - r^2)\pi} \int_r^{r_1} T 2\pi r dr = \frac{2}{(r_1^2 - r^2)} \int_r^{r_1} T r dr \\ &= \frac{2}{r_1^2 - r^2} \left\{ \left[ \frac{T r^2}{2} \right]_r^{r_1} - \int_r^{r_1} \frac{r^2}{2} dT \right\}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (4a) ist:

$$dT = \frac{c}{r} dr,$$

also:

$$T_{rr_1} = \frac{T_1 r_1^2 - T r^2}{r_1^2 - r^2} + \frac{U_\beta r_1}{2k'},$$

da

$$U_\beta = -k' \left( \frac{dT}{dr} \right)_{r=r_1} = -\frac{k'c}{r_1}.$$

Die mittlere Temperatur des ganzen Gases würde hier-nach sein:

$$\frac{T_{rr_1}(r_1^2 - r^2)\pi + T r^2 \pi}{r_1^2 \pi} = T_1 + \frac{U_\beta r_1}{2k'} - \frac{U_\beta r_1 r^2}{2r_1^2 k'}.$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck ein in die Gleichung:

$$T_m = \frac{1}{r_1^2 \pi} \int_0^{r_1} T 2\pi r dr,$$

so wird:

$$(11) \quad T_m = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \left( T_1 + \frac{U_\beta r_1}{2k'} - \frac{U_\beta r_1 r^2}{2k r_1^2} \right) r dr = T_1 + \frac{U_\beta r_1}{4k'},$$

Nach Gleichung (10) wird:

$$(12) \quad T_m = \frac{r_1 U}{k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{U_\beta r_1}{4k'} + T_2.$$



Die Wärmemenge, welche an der äusseren Glaswand austritt, ist dieselbe, welche, in dem Gase durch den elektrischen Strom erzeugt, an der inneren Glaswand eintritt:

$$2 r_2 \pi U = 2 r_1 \pi U_\beta = Q_1,$$

mithin wird:

$$(13) \quad T_m - T_2 = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{Q_1}{8 \pi k'}.$$

Nach den Wiedemann'schen Messungen sind bei dem Durchgang des elektrischen Stromes in Capillaren von demselben äusseren Halbmesser  $r_2$  und dem verschiedenen inneren  $r_1$  und  $r_1'$  die Temperaturen an der äusseren Glaswand ( $T_2$ ) ebenso wie die ausströmenden Wärmemengen ( $Q_1$ ) dieselben. Für eine Röhre vom Radius  $r_1'$  bez.  $r_2$  würde die mittlere Temperatur demnach sein:

$$(14) \quad T_m' = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1') + \frac{Q_1}{8 \pi k'} + T_2.$$

Setzen wir  $T_2 = 0$ , so wird:

$$(15) \quad T_m : T_m' = \frac{1}{k} \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log \left( \frac{r_2}{r_1'} \right) + \frac{1}{4 k'}.$$

Zu einem ähnlichen Ausdruck gelangt man durch einige Folgerungen, welche man aus der Abhandlung von E. Warburg: „Ueber Wärmeleitung und Temperatur der in Geissler'schen Röhren leuchtenden Gase“<sup>1)</sup> ziehen kann.

Für das positive ungeschichtete Licht ist unter der Annahme, dass die ganze elektrische Arbeit dort, wo sie geleistet wird, sich in Wärme umsetzt und die Stromdichte im ganzen Querschnitt des Rohres constant ist, die durch die Stromarbeit hervorgerufene Wärmemenge  $q$  in Grammc calorien pro Secunde und Cubikcentimeter:

$$(1) \quad q = 0,237 \frac{v i}{R^2 \pi},$$

wo  $v$  der Potentialgradient in Volt pro Centimeter,  $i$  die Stromstärke in Ampère und  $R$  der innere Röhrenhalbmesser in Centimetern bedeutet.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 265. 1895.

Vermittelt der Gleichungen:

$$(2) \quad r^2 \pi q = -2 r \pi k' \frac{du}{dr} \quad (r < R)$$

und

$$(3) \quad R^2 \pi q = -2 r \pi k' \frac{du}{dr} \quad (r > R),$$

wo  $u$  die Temperatur,  $k'$  das Wärmeleitungsvermögen des Gases und  $k$  das des Glases bezeichnet, findet man für die mittlere Temperatur des Gases:

$$(4) \quad \bar{u} = v i \left( \frac{0,237}{2 \pi k} \log \left( \frac{R'}{R} \right) + \frac{0,237}{8 \pi k'} \right).$$

Da der Potentialgradient nach den Messungen von A. Herz<sup>1)</sup> für das positive Lichtbüschel von dem Röhrenquerschnitt nahezu unabhängig ist (der Potentialgradient nimmt mit abnehmender Lichtweite ein wenig zu), so ist für die gleiche Stromstärke  $i$  das Product  $vi$  in allen Röhren eine Constante. Nach Gleichung (4) besteht daher zwischen den Temperaturen in zwei Geissler'schen Röhren mit dem gleichen äusseren Radius  $R'$  und dem verschiedenen inneren  $R_\alpha$  und  $R_\beta$  die Beziehung:

$$(5) \quad \bar{u}_\alpha : \bar{u}_\beta = \frac{1}{k} \log \left( \frac{R'}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log \left( \frac{R'}{R_\beta} \right) + \frac{1}{4 k'}.$$

Dieses ist aber derselbe Ausdruck für die Temperaturen, wie er sich aus den Wiedemann'schen Messungen ergeben hatte, was nach den Annahmen, unter denen die vorhergehende Rechnung vor sich ging, und nach den Untersuchungen von Ångström<sup>2)</sup> und W. Wien<sup>3)</sup> vorausszusehen war.

Ist die Glasdicke der Röhre  $\varrho$  gegen den Radius der Röhre hinlänglich klein, so erhält man für die mittlere Temperatur den Wert:

$$u = v i \left( \frac{0,0878}{k'} \left( \frac{\varrho}{R} \right) + \frac{0,0094}{k} \right).$$

Bei gleicher Glasdicke würden die Temperaturen in verschiedenen Geissler'schen Röhren hiernach höchstens den reciproken Werten der Radien proportional sein können, wie es auch die obigen Messungen ergeben, und zwar müssen,

1) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 264. 1895.

2) K. Ångström, Abhandl. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Upsala 1892.

3) W. Wien, Physikal. Zeitschr. 1. p. 10. 1899.

entsprechend den Werten für das Wärmeleitungsvermögen  $k'$  für Wasserstoff und Luft, die Temperaturunterschiede in den verschiedenen Querschnitten für Luft grösser sein als für Wasserstoff [vgl. für gleiche Verhältnisse ( $p = 3,2$  mm), Reihe a und d].

Nach den vorstehenden Erörterungen können wir demnach auch in den engen Capillaren nicht so hohe Temperaturen annehmen, wie sie nach den calorimetrischen Messungen berechnet worden sind.<sup>1)</sup>

#### Temperaturen in Geissler'schen Röhren beim Einschalten von Funkenstrecken.

§ 5. Mit Rücksicht auf die in der Spectralanalyse bisher allgemein vertretene Ansicht, dass die Veränderung des Bandenspectrums beim Einschalten von Funkenstrecken in ein Linienspectrum durch die Temperaturerhöhung des Gases bedingt ist, indem das Bandenspectrum einer niedrigen, das Linienspectrum einer hohen Temperatur entspricht<sup>2)</sup>, schien es nicht unwesentlich, den Einfluss von Funkenstrecken auf die Temperatur des Gases zu untersuchen; es war hierzu die Einrichtung getroffen, dass mit Hilfe einer Wippe ein gut isolirtes Funkenmikrometer in den secundären Stromkreis des Inductoriums ein- und ausgeschaltet werden konnte. Die Versuche mussten sich in der Regel auf sehr kleine Funkenstrecken beschränken, da beim Einschalten von grossen Funkenstrecken erhebliche Schwankungen der Galvanometernadel eintraten.

Beim Einschalten von 2—3 cm grossen Funkenstrecken zeigt sich stets eine höhere Temperatur als ohne Funkenstrecke und zwar nahm diese Temperaturerhöhung mit abnehmendem Drucke zu; wurden kleinere Funkenstrecken eingeschaltet, so zeigte die Galvanometernadel ohne grössere Schwankungen niedrigere Temperaturen an.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 270. 1894; W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 576. u. 578. 1879; G. Klingenberg, Elektrotechn. Zeitschr. 14. p. 226. 1896; M. Cantor, Ann. d. Phys. 3. p. 462. 1900; H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 782. 1895; F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. 56. p. 226. 1895; A. Wüllner, Lehrbuch der Physik 3. p. 1892. 1896; O. Lehmann, Elektrische Entladungen p. 541. 1898.

2) H. Kayser, Wied. Ann. 42. p. 310. 1891; E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 231. 1880.

Bei der folgenden Messungsreihe befand sich das Bolometer 2,5 cm von der Anode im positiven Lichtbüschel; die Geissler'sche Röhre mit dem Durchmesser 2 cm war mit Luft angefüllt.

Druck	Temperaturen		Differenz
	ohne Funkenstrecke	mit einer Funkenstrecke = 3 mm	
7,66 mm	29,4°	23,8°	5,6°
4,7	23,2	19,8	3,4
2,9	14,6	12,2	2,4
1,9	11	11	—
1,6	18,6	18,2	0,4
1,5	26,5	26	0,5

Hiernach nimmt bei Einschaltung kleinerer Funkenstrecken (hier — 3 mm —) die durch diese bedingte Temperaturerniedrigung vom kritischen Druck aus mit höheren und niedrigen Drucken zu.

Den Einfluss kleiner Funkenstrecken erkennt man besser bei den folgenden Messungen, wo für die einzelnen Drucke die Grösse der eingeschalteten Funkenstrecke verändert wird. Die Geissler'sche Röhre hat einen Durchmesser von 1,5 cm und ist mit Wasserstoff angefüllt.<sup>1)</sup>

Druck 7 mm		Druck 4,2 mm	
Funkenstrecke	Scalenteile	Funkenstrecke	Scalenteile
0 mm	188	0 mm	147,5
0,8	152	0,5	119
0,5	148,5	1	118
1	143,5	2	108,5
2	139	3	107,0
3	136,5	5	105,5
6	133,5	7	105,5
10	133	10	106
18	(140)		

1) Bei der Entladung durch CO<sub>2</sub>, O und Luft bildete sich infolge Zerstäubens der Platinelektrode ein Platinspiegel an der inneren Glaswand; liess man dann in dem Rohre die Entladungen durch Wasserstoff gehen, so verschwand der Platinniederschlag nach wenigen Secunden.

Bei grösseren Funkenstrecken als 10 mm nimmt die Temperatur wieder zu, es treten aber jetzt derartige Schwankungen der Galvanometernadel ein, dass keine genauere Messung mehr möglich ist.

Druck 2,5 mm		Druck 1,5 mm	
Funkenstrecke	Scalenteile	Funkenstrecke	Scalenteile
0 mm	83	0 mm	157
1	79	1	152
2	79	2	151
3	81,5	4	149
4	88,5	6	148,5
6	86,5	10	156
10	87	20	180

Mit zunehmender Funkenstrecke nimmt also die Temperatur im positiven Lichtbüschel immer mehr ab; doch wird die Temperaturerniedrigung bei gleicher Zunahme der Funkenstrecke immer kleiner, bis bei einer gewissen Länge der Funkenstrecke ein Minimum der Temperatur vorhanden ist; diese Funkenstrecke hat für die verschiedenen Drucke verschiedene Werte,

bei dem Drucke 7 mm ist sie etwa gleich 10 mm

"	"	"	4,2	"	"	"	"	8	"
"	"	"	2,5	"	"	"	"	1,5	"
"	"	"	1,3	"	"	"	"	6	"

Schliesslich möge noch eine Messungsreihe angeführt werden, welche den Einfluss einer Funkenstrecke von 3 mm Länge auf die Temperatur der Gase in Geissler'schen Röhren verschiedenen Querschnittes zeigt:

Durchmesser der Röhre	Luft, $p = 2,4$ mm		Differenz
	Temperatur		
	ohne Funkenstrecke	mit Funkenstrecke	
4 cm	12,5°	11,6°	0,9°
2	21,2	19,9	1,3
1,5	26	25,5	1,5

Man erkennt aus der Tabelle, dass die Temperaturerniedrigung durch Einschalten kleiner Funkenstrecken um so grösser ist, je enger der Querschnitt der Röhre wird.

Wir können uns diese Resultate so erklären, dass beim Einschalten von sehr kleinen Funkenstrecken der Verlauf der Entladungen nicht geändert wird, indem für die Entladung im Geissler'schen Rohre ein höheres Potential erforderlich ist als zu der Durchbrechung der kleinen Luftstrecken; beim Einschalten der Funkenstrecken geht aber ein Teil der Energie in Form von Wärme verloren, wir haben eine Temperaturerniedrigung, die um so grösser ist, je länger die Funkenstrecke und je enger der Röhrenquerschnitt wird.

Beim Einschalten einer grösseren Funkenstrecke, zu dessen Durchbrechung ein grösseres Potential erforderlich ist, ändert sich, wie E. Wiedemann gezeigt hat<sup>1)</sup>, der ganze Verlauf des Entladungsprocesses; die im Geissler'schen Rohre übergehenden Elektrizitätsmengen werden grösser, wir haben eine Temperaturerhöhung.

Bei der Funkenstrecke endlich, bei der das Maximum der Temperaturerniedrigung eintritt, können wir annehmen, dass das Potential zur Durchbrechung der Luftschicht ebenso gross sein muss, wie an den Elektroden der Geissler'schen Röhre; die Funkenstrecke, bei der die grösste Temperaturerniedrigung vorhanden ist, muss für die verschiedenen Drucke demnach verschiedene Länge haben; sie wird, wie es auch die Versuche ergeben, vom kritischen Druck an mit ab- und zunehmendem Druck zunehmen müssen.

#### Temperaturen in Geissler'schen Röhren beim Einschalten von Selbstinductionsspiralen.

§ 6. A. Schuster und G. A. Hemsalech<sup>2)</sup> haben kürzlich, als sie, um die oscillirenden Entladungen einer Leydener Flasche zu trennen, in den Stromkreis derselben eine Selbstinduction einschalteten, die Beobachtung gemacht, dass die Luftlinien, die bisher das Metallspectrum störten, im Spectrum verschwanden. Aus der weiteren Beobachtung<sup>3)</sup>, dass gerade die Spectrallinien, welche nur bei einer hohen Temperatur im

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 758. 1883.

2) A. Schuster u. G. A. Hemsalech, Proc. Roy. Soc. 64. p. 321. 1899.

3) G. A. Hemsalech, Journal de physique (3) 8. p. 652. 1899.



Spectrum auftreten, beim Einschalten einer Selbstinduction geschwächt werden und sogar verschwinden, hat man den Schluss gezogen, dass der Einfluss der Selbstinduction auf eine Temperaturerniedrigung des Funkens zurückzuführen ist.

In der Annahme, dass eine durch Selbstinduction bewirkte Temperaturerniedrigung bei der Funkenentladung in freier Luft ebenso bei der Entladung durch eine Geissler'sche Röhre eintritt, sind Messungen gemacht worden, welche den Einfluss einer Selbstinduction auf die Temperatur im Geissler'schen Rohre darthun sollen; zu diesem Zwecke war die Einrichtung getroffen, dass vermittelt zweier Wippen eine Spirale, eine Leydener Flasche und beide gleichzeitig in den Stromkreis eines Inductoriums eingeschaltet werden konnten.

Die Leydener Flasche war stets parallel geschaltet; d. h. ihre innere Belegung war mit der Kathode und dem einen Pol, die äussere mit der Anode und dem anderen Pol des Inductoriums verbunden. Die Selbstinduction bestand aus einem gewöhnlichen kupfernen Leitungsdraht, der zu einer Spirale von 5 cm Höhe mit einem äusseren Durchmesser von 9 cm und einem inneren von 4 cm aufgewickelt war; sie war gewöhnlich vor der Kathode eingeschaltet.

Die in den folgenden Tabellen angeführten Scalenteile bilden den Mittelwert von mehreren durch wiederholtes Ein- und Ausschalten der Leydener Flasche bez. Spirale erhaltenen Messungen, und geben die Temperatur-Erniedrigung bez. -Erhöhung an, die durch Einschalten dieser in der Geissler'schen Röhre hervorgerufen wird.

Entfernung	CO <sub>2</sub> Druck = 4 mm			
	O-Anode	Scalenteile	Spirale	Leydener Flasche
5 mm		135	+ 1	129,5
30 "		136,5	+ 1	131
60 "		134	+ 3	126
80 "		130	+ 1	124
100 "		125	+ 0	120
130 "		116	- 3,5	119
150 "		127	- 4,5	132
163 "		228,5	- 7	247
165 Kathode				

Durch Einschalten einer Spirale in den Stromkreis wird hiernach eine Temperaturerhöhung in dem positiven Lichtbüschel, eine Temperaturerniedrigung in der Nähe der Kathode hervorgerufen.

Wahrscheinlich hat neben der Selbstinduction noch die Capacität der Spirale Einfluss auf den Entladungsprocess; bei den folgenden Versuchen bleibt die Leydener Flasche stets eingeschaltet, gegen deren Capacität man die der Spirale vernachlässigen kann; der primäre Strom des Inductoriums wird durch sechs Accumulatoren geliefert, sodass jetzt der Oeffnungs- und Schliessungsstrom übergeht. Die Kathode der ersteren befindet sich bei 267 mm, die des Schliessungsstromes bei 0 mm.

H Druck = 4,6 mm.			H Druck = 2 mm.		
Ent- fernung	Scalenteile		Ent- fernung	Scalenteile	
	ohne Spirale	mit Spirale		ohne Spirale	mit Spirale
10 mm	101,5	0	5 mm	109	- 1
45 "	88,2	0	35 "	89	- 1
110 "	91,5	0	70 "	87	- 1
140 "	91,8	0	110 "	88,5	- 2,5
190 "	91,5	-0,8	150 "	87,5	- 1,5
220 "	88,5	-0,8	150 "	89	- 3,5
240 "	88	-1	210 "	88,5	- 5,5
255 "	97	-1	240 "	128	-14
265 "	108	-1,5	260 "	215	-20
			267 "	Kathode des Oeffnungs- stromes	

Bei dem Druck = 2 mm sind die Temperaturerniedrigungen, welche durch eine Selbstinduction verursacht wird, grösser als bei dem höheren Druck = 4,6 mm. Die grösste Temperaturerniedrigung findet an der Elektrode statt, die der Kathode des Oeffnungsstromes entspricht.

§ 6. Ein eigenartiges Gebilde von Thonerde<sup>1)</sup> setzte sich an der einen der kreisförmigen Aluminiumelektroden einer Geissler'schen Röhre, in der sich Luft unter etwa 5—6 mm Druck befand, ab. Nach wenigen Secunden Stromdurchgang eines starken Inductionsstromes hörte die Entladung plötzlich auf, und beschränkte sich auf ein Glimmen der oberen Elek-

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. 136. p. 23. 1869.

trode, an welcher sich symmetrisch zu der Elektrodenfläche *a* auf beiden Seiten eine Abbildung derselben gesetzt hatte (*b* und *c*), welche mit dem eigentlichen Elektrodenscheibchen durch feine Stäbchen verbunden war (Fig. 2)<sup>1)</sup>; an der unteren Fläche befand sich eine runde Oeffnung *d*, die augenscheinlich denselben Querschnitt hatte, wie das Aluminiumstäbchen, an dem die Elektrodenscheibe befestigt war. Die untere Aluminiumelektrode wies an dem sie tragenden Aluminiumdraht



Fig. 2.

nur vereinzelte graue Fädchen auf, die scheinbar symmetrisch um den Draht gruppiert waren.

Abscheidungen von Thonerde an den Elektroden haben bereits Hittorf, Graham<sup>2)</sup> und Warburg erhalten; letzterer beschreibt die Bildung von Thonerde folgendermaassen: <sup>3)</sup> „Wenn Al-Kathoden in Gegenwart von Hg-Dämpfen längere Zeit den Strom geleitet haben, so zeigen sie in der Regel, an die frische Luft gebracht, zunächst einen gelblich weissen Anflug und nach einiger Zeit sieht man hier und da weissliche Haarwülste aus dem Draht hervorwachsen.“

1) Die Fig. 2 ist nach einer photographischen Aufnahme hergestellt worden.

2) E. Graham, Wied. Ann. 64. p. 49. 1898.

3) E. Warburg, Wied. Ann. 21. p. 756. 1884.

Da, wie sich später herausstellte, das hier benutzte Geissler'sche Rohr nicht ganz dicht war, also während des Stromdurchganges Luft zutreten konnte, ferner aus der Ansatzröhre, die mit Hg angefüllt war, Hg-Dämpfe vorhanden waren, so sind die Bedingungen, unter denen derartige Thonerdeabsetzungen vor sich gehen, auch hier gegeben.

Weitere Versuche, die mit vollständig blanken, und amalgamirten Aluminiumelektroden angestellt wurden, ergaben, wenn Luft zugelassen wurde, nur eine unregelmässige Bildung von Thonerde an der Kathodenelektrode.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institute der Universität Bonn ausgeführt; ich benutze die Gelegenheit, dem Director desselben, Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, sowie dem Hrn. Privatdocenten Dr. A. Hagenbach auch an dieser Stelle für die mir jederzeit in liebenswürdigster Weise gewährte Unterstützung bei meiner Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 7. December 1900.)

### 9. *Magnetische Spiegelbilder; von Heinrich Jaeger.*

(Auszug aus der von der technischen Hochschule in München  
gekrönten Preisschrift.)

Wie von J. Stefan bereits 1882 theoretisch dargethan wurde<sup>1)</sup>, haben ferromagnetische Substanzen bei geeigneter Disposition die Fähigkeit, in magnetischen Feldern hinsichtlich der Energieverteilung Veränderungen hervorzurufen. Man beschränkte sich darauf, die sogenannte „Schirmfähigkeit“ gedachter Materialien festzustellen, d. h. das Vermögen ferromagnetischer Substanz, in gewissen Fällen als Schutz gegen magnetische Kräfte dienen zu können. So wichtig die experimentell verificirten und maritimen Interessen nutzbar gemachten Untersuchungen Stefan's gewesen sind<sup>2)</sup>, ihnen kann der Vorwurf einer gewissen Einseitigkeit nicht erspart bleiben. Der Gedanke, dass in *dem* Teile des auf gedachte Weise gestörten Feldes, welcher mit der „geschirmten“ Stelle correspondirt, durch die Anwesenheit des Ferromagneticums ebenfalls Veränderungen der Energieverteilung — vielleicht *conträrer* Art als die seither beobachteten — *aufträten*, erschien durchaus discutabel und bei dem Dunkel, welches heute noch die letzten Ursachen des Phänomens verschleiert, welches als „Magnetismus“ in die Erscheinung tritt, gewiss der eingehenden Prüfung würdig. Ich stellte mir daher die Aufgabe, unter möglichst klaren und übersichtlichen Verhältnissen Schirmwirkungen im Sinne Stefan's herzustellen und die Untersuchungen in den Grenzen zu vervollständigen, die durch die experimentelle Durchführbarkeit gegeben waren.

#### 1. Versuchsanordnung und Messmethoden.

Als magnetisches Feld wählte ich zunächst das einfachste und bekannteste, das des *geradlinigen* stromdurchflossenen *Leiters*. Diese Annahme und technische Erwägungen führten

1) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 85. 2. Abt. p. 613.

2) W. Thomson's Marinegalvanometer.

zu dem Entschluss, für das ins Feld einzubringende Ferromagneticum die Form breiter, ebener Platten zu wählen. Derartige 150–200 mm breite Stäbe aus Stahl oder Eisen — es erschien ein Vergleich des Verhaltens verschiedenster Materialien für höchst zweckmässig — konnten relativ billig genau gleichmässig hergestellt werden und boten hinsichtlich der Homogenität des Materiales die grösste Gewähr. Vermutlich waren dieselben befähigt, ins Feld gebracht, die translatorische Ausdehnung des magnetischen Kraftflusses zu hemmen, d. h. in einer Richtung eine mehr oder minder vollkommene *Schirmwirkung* zu veranlassen.

Die directe Messung der zu untersuchenden Feldstärken mit dem Magnetometer erschien unthunlich, einerseits wegen der relativ geringen Empfindlichkeit, dann aber auch wegen des vom Instrument selbst ausgehenden Kraftflusses. Es kam demnach für die beabsichtigten Versuche nur eine Methode in Betracht, nämlich in einer secundären eisenlosen Spule („*Tastspule*“) Inductionsströme zu erzeugen, deren Intensität ein relatives Maass für die locale Feldstärke war. Zur Erzeugung dieses secundären Stromes lagen zwei Möglichkeiten vor, nämlich durch *Drehen* der Tastspule um ihre zum Leiter parallele Axe im *constanten* Feld, oder aber durch ein *entstehendes* oder *vergehendes* Feld, bewirkt durch Schliessen oder Unterbrechen des Primärstromes. Beide Methoden erwiesen sich als durchaus gleichwertig, indessen machte ich meistens von der ersterwähnten „Methode I“ Gebrauch, da sich die Untersuchungen vornehmlich auf *constante Felder* beziehen sollten. Zu Vorversuchen, und wenn sonstige magnetische Einflüsse die Erzeugung des Messinductionsstromes im constanten Felde unmöglich machten, wandte ich die, wie sich zeigen wird, wesentlich einfachere und deshalb schneller zum Ziele führende „Methode II“ an. In diesen Fällen erfolgte der Stromschluss durch einen sinnreich construirten automatischen Schliesser, bei dem der Contact durch Niederschnellen einer angespannten Feder hergestellt wurde. Fehler, herrührend aus ungleichmässigem Tempo des Stromschlusses, waren also mit absoluter Sicherheit ausgeschlossen. Die specielle Versuchsanordnung war demgemäss zweckmässig so zu wählen, dass beide Methoden in beliebigem Wechsel als Controle angewandt werden konnten.



## 2. Spezielle Versuchsanordnung.

Als Strommesser im secundären Kreis benutzte ich das astatische Galvanometer von H. du Bois-Rubens, welches, mit dem leichtesten der drei vorhandenen Magnetsysteme ausgerüstet, auf 17 sec einer vollen Amplitude astasirt und in

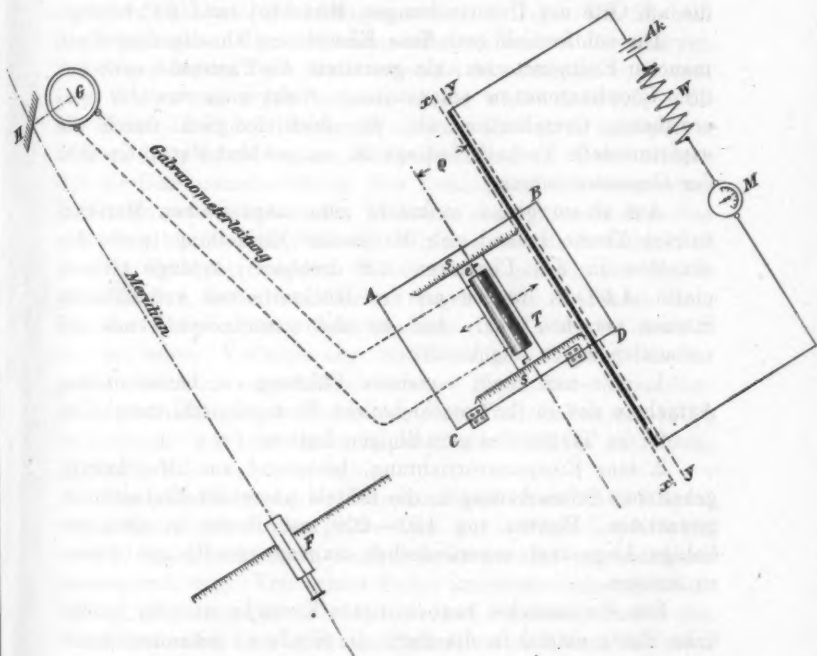


Fig. 1.

Verbindung mit der Spiegelablesung nach Gauss benutzt wurde. Die Notwendigkeit, mit der Versuchseinrichtung thunlichst dem Messapparate fernzubleiben, zwang mich, den Galvanometerspiegel mittels des zu seiner Normalen unter  $45^\circ$  aufgestellten Hülfs spiegels *H*, vergl. Fig. 1, zu beobachten. Der Abstand dieses Bildes von der Scala am Fernrohr *F* betrug 2000 Scalenteile. Unter diesen Verhältnissen ergab sich als Galvanometer-

empfindlichkeit pro Scalenteil für *dauernde Ablenkung*  $1.10^{-9}$  Amp. Die Verwendung dieses höchstempfindlichen Instrumentes bedingte die Elimination des erdmagnetischen Einflusses auf die drehbare Tastspule, d. h. die Spulenaxe, sowie die wesentlichen Teile des Versuchsapparates: der geradlinige Leiter und die Axe der ferromagnetischen Platten bez. deren Einspannvorrichtung waren in die Richtung der Inclination zu bringen, die am Orte der Untersuchungen (München) rund  $64^{\circ}$  beträgt.

Die schliesslich getroffene Einrichtung ähnelte derjenigen mancher Erdinductorien; sie gestattete die Tastspule nach den drei Coordinatenaxen einzustellen. Sieht man von der vorerwähnten Complication ab, die doch lediglich durch die experimentelle Technik bedingt ist, so gewährt Fig. 1 ein Bild der Gesamtanordnung.

Auf einem genau senkrecht zum magnetischen Meridian fixirten Tische befand sich die (behufs Einstellung in die Inclination in den Charniren *EF* drehbare), kräftige Grundplatte *ABCD*, welche an der Rückseite mit verstellbaren Stützen versehen war. Auf ihr und unveränderlich mit ihr verbunden waren angebracht:

1. eine mit Scala versehene Führung *ss*, bestimmt zur Aufnahme des in ihr verschiebbaren Tastspulenschlittens *e*;
2. die Träger des geradlinigen Leiters *L*;
3. eine Einspannvorrichtung, bestehend aus zwei kräftig gehaltenen Schraubzwingen, die mittels passender Einlagstücke gestatteten, Platten von 150—200 mm Breite in eine beliebige Lage zum unveränderlich fixirten geradlinigen Leiter zu bringen.

Für die zunächst beabsichtigten Versuche war die bezügliche Platte einmal in die durch die Grade *xx* gekennzeichnete Lage, dann in die Lage *yy* zu bringen, wodurch die Abtastung der correspondirenden Felder ermöglicht war.

Die Tastspule *T* war auf dem Schieber *e* montirt, welcher in der Führung *ss* genau parallel mit sich selbst verschoben werden konnte. Die jeweilige Entfernung der Tastspulenaxe von der Axe des geradlinigen Leiters war durch zwei am Schieber *e* befindliche Zeiger in Verbindung mit den Führungsscalen jederzeit genau ablesbar. Umgekehrt war die Spule mit grösster Genauigkeit in jeder beliebigen Entfernung vom

Leiter, die ich stets mit  $\rho$  bezeichnen werde, zu fixiren. Die Windungsgruppen der Tastspule waren auf einen an den Kanten abgerundeten Holzrahmen (Länge 200 mm, Höhe 20 mm) gewickelt. Um ein Werfen oder Ziehen dieses Rahmens thunlichst zu verhindern, war er aus mehreren Stücken harten Holzes zusammengeleimt. Seitliche Schilde aus dünnem Holze vervollständigten die Spule. Auf dieser befanden sich zwei hintereinandergeschaltete Wickelungen von je 4 Lagen von 59 bez. 55 Windungen. Der Durchmesser des Drahtes der inneren Wickelung betrug 0,25 mm, derjenige der äusseren 0,18 mm. Der Widerstand ergab sich zu  $43,4 + 67,28 \Omega = 110,68 \Omega$ . Die Enden dieser combinirten Wickelung führten zu am Spulenrahmen befestigten kleinen Messingstücken, an diese schloss sich die Galvanometerleitung. Zur Vermeidung von thermischen Einflüssen war es notwendig, in diesem secundären Stromkreise sämtliche blanke Metallteile mit Filz und Gummi zu umkleiden. Um die Tastspule bequem um ihre zum geradlinigen Leiter parallele Axe drehen zu können, trugen beide Kopfenden ihres Rahmens Messingbügel, in deren einem eine Kurbel, im anderen ein in seiner Verlängerung rechtwinklig gebogener Zapfen genau centrirt eingelassen waren. Regulirbare Anschläge gestatteten die genaue Einhaltung eines Drehwinkels von  $180^\circ$ , andererseits war die Spule leicht in der Nulllage zu fixiren. (Methode II.)

Der geradlinige Leiter  $L$  bestand aus einem 2,5 m langen, sorgfältigst durch Drillen gestreckten, gut isolirten Kupferdraht von 2,0 mm Durchmesser, welcher genau parallel der Spulenaxe ausgespannt war. Von seinen Enden aus setzte sich die Stromleitung geradlinig bis zur Decke, bez. bis zum Boden des Versuchsraumes fort, ging an diesem weiter bis zu der etwa 7 m entfernten Wand, wo sie sich durch die constante Stromquelle  $Ak$ , den variablen Widerstand  $W$  und das Messinstrument schloss. Als Strommesser  $M$  diente in diesem Kreise ein Weston'sches Normalampèremeter, dessen absolute Zuverlässigkeit mir durch frühere Versuche bekannt war.

Durch diese Anordnung erreichte ich, dass weder das Einschalten eines Stromes von 1,5 Ampère maximaler Stärke in die Primärleitung, noch das Einbringen des Ferromagneticums die Galvanometerempfindlichkeit irgendwie beeinflusste.

Ich wende mich nun zur Darlegung des Ganges einer vollständig durchgeführten Versuchsreihe und beziehe mich in der Folge auf diese ausführliche Darstellung. Zunächst wurde für eine beliebige Stellung der Tastspule, beispielsweise „ $\varrho$ “ = 20 mm, der Neigungswinkel der Spulenaxe zur Horizontalen so lange variiert, bis ein blosses Drehen der Spule im Erdfeld einen möglichst verschwindenden Ausschlag im Galvanometer bewirkte, d. h. bis sich das ganze Versuchsgestell in der Richtung der erdmagnetischen Inclination befand. Dann wurde mit Fernrohr und Fadenkreuz ein geeigneter Punkt des Versuchsgestelles einvisirt, sodass sich eine eventuelle Aenderung des Grundplatten-Neigungswinkels durch die folgenden Operationen und eine dadurch eventuell bewirkte Veränderung des Wertes der erdmagnetischen Kraft sich nicht der Beobachtung entziehen konnte. Da sich das Erdfeld für die mittels Tastspule messbare Strecke von 200 mm ( $\varrho_{\min.} = 20$  mm,  $\varrho_{\max.} = 220$  mm, bedingt durch die Eigendimensionen der Tastspule und die Schieberabmessungen) als inconstant erwies, so ergab sich als zweite Operation: Abtastung des „Erdfeldes“, vergl. Tabellenschema. Demnächst war die Feldmessung vorzunehmen, wenn der Strom den geradlinigen Leiter durchfloss. Die durch die Abtastung erhaltenen Werte bringe ich unter *Berücksichtigung der Erdfeldquote* unter „Feld des freien Leiters“.

Dem Grundgedanken der Untersuchungen entsprechend war die Constitution des so genau bekannten Feldes durch eingebrachte Ferromagnetica zu stören. Da sämtliche Versuchsmaterialien mindestens Spuren eines durch unsere Mittel nicht zu vernichtenden magnetischen Residuums aufwiesen, so war vor Vornahme der endgültigen Abtastung das Eigenfeld der betr. Versuchsplatte abzutasten. Hierdurch wurden auch die kleinsten Aenderungen hinsichtlich des Verlaufes der erdmagnetischen Kraftlinien eliminirbar (Columnne IV). Schliesslich wurde die letzte Abtastung vorgenommen, wenn der Primärstrom wieder geschlossen war. Die directe Beobachtung (Columnne V) ergab natürlich den Summenwert der ineinandergelagerten Felder. Die unter Berücksichtigung des Plattenfeldes richtiggestellten Werte figuriren unter Columnne VI. Zu bemerken ist, dass bei Abtastung des Feldes mit Hülfe des automatischen Rheotoms die Columnnen II, IV u. V in Wegfall geraten, da

constante Felder in der ruhenden Spule keine Inductionswirkungen hervorrufen.

### Tabellenschema.

Stromstärke im Primärleiter: .... Ampère.

I	II	III	IV	V	VI
$\varnothing$ mm	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte	Feld der Platte + verändert. Feld des Leiters	Verändertes Feld des Leiters

### 3. Versuchsmaterial.

Wie erwähnt, war für das ins Feld einzubringende Ferromagneticum die ebene Plattenform gewählt worden.

Wurden diese Platten in die Inclinationsrichtung gebracht, — dazu zwang ja die Versuchstechnik —, so nahmen die Enden durch Induction im Erdfeld eine gewisse Polarität an. Der Einfluss dieser Magnetisirung konnte verschwindend klein gemacht werden, wenn man die Länge der Stäbe im Vergleich zu ihrer Dicke und Breite reichlich bemaass. So wählte ich als Plattenlänge das 8- bis 10 fache der Tastpulenlänge, eine Annahme, die sich durchaus bewährte. Folgende Tabelle gewährt einen Ueberblick über das reiche Versuchsmaterial, sowie über die speciellen Eigenschaften desselben. Die Platten 3, 4 und 5 stellen die verschiedenen Härtephasen einer Stahlsorte dar. — Vor Beginn der Versuche wurde jede einzelne Platte in Drahtschleifen senkrecht zum Meridian aufgehängt und durch kräftige longitudinale Erschütterungen möglichst entmagnetisirt.

Tabelle I.

Be- zeichnung Nr.	Material	Sonstiger Ver- wendungs- zweck	Härte- grad	Mech. Eigenschaft		Chem. Eigenschaft		Dimen- sionen
				$k_z$ kg	$D$ %	Gehalt C   W		
1	{ Gussstahl (Wolfram- stahl)	{ zur Be- arbeitung härtester Materialien }	glashart	115,0	5,0	1,2	5,5	{ 2000 × 200 × 10
2	Gussstahl	{ für Werk- zeuge }	hart	80,0	10,0	0,7	—	do.
3	Gussstahl	für Federn	sehr hart	101,0	6,0	0,7	—	{ 1500 × 150 × 10
4	Gussstahl	für Federn	hart	—	—	0,7	—	do.
5	Gussstahl	für Federn	weich	—	—	0,7	—	do.
6	Flusseisen	für Federn	sehr weich	38,3	25,6	0,09	—	do.
7	{ Holz- kohleneisen (geglüht)	für Dampf- kessel	weichstes Material }	—	—	0,08	—	{ 2000 × 960 × 12

## 4. Vergleich der Schirmfähigkeiten.

Entsprach die eingangs aufgestellte Hypothese den physikalischen Thatsachen, so mussten zwischen der Schirmwirkung und der vermuteten Correspondenzercheinung enge Beziehungen bestehen. Ich verglich daher zunächst sämtliche Platten hinsichtlich ihrer Schirmfähigkeit nach vorerwähnter „Methode II“. Die beigegebene Tab. II lässt mit grosser Klarheit erkennen, dass die Abschwächung des Feldes durchaus proportional der Härte des zwischen Leiter und Tastspule eingebrachten Ferromagneticums ist. Da sich die Schirmwirkung bei dem *weichsten* Materiale als am vollständigsten erwies, so war dieses für die ferneren Versuche ganz besonders zu berücksichtigen.

Tabelle II.

Stromstärke:  $i = 1,0$  Amp.

$\varrho$ mm	Feld des freien Leiters	Abschwächung des Feldes durch					
		Platte Nr. 1	Platte Nr. 2	Platte Nr. 3	Platte Nr. 4	Platte Nr. 5	Platte Nr. 6
30	47,2	15,0	18,9	14,1	10,9	10,5	7,2
35	40,2	13,1	11,0	12,5	10,8	9,85	7,21
40	35,1	13,2	12,5	12,5	10,1	9,25	7,1
45	31,8	13,0	11,3	11,8	9,8	9,1	8,1
50	28,4	12,0	10,2	11,5	10,2	9,4	7,8
60	24,0	11,0	10,2	10,8	10,1	9,6	8,1
70	20,5	11,2	9,9	11,1	9,2	8,3	8,0
80	18,5	10,0	9,5	10,6	8,8	8,5	8,2
90	16,9	9,9	10,0	10,1	8,3	8,2	7,8
100	15,0	9,8	9,4	9,6	8,8	8,5	8,0
—	—	—	—	sehr hart	hart	weich	sehr weich

## 5. Verhalten der Weicheisenplatte Nr. 6 speciell.

Einige Versuche liessen erkennen, dass der *procentuale* Grad der Schirmwirkung mit *abnehmender* Stromstärke im Primärkreis im allgemeinen *zunahm*. Bei 0,5 Ampère war dieselbe, wie Tab. III (p. 354) erkennen lässt, nahezu vollständig, d. h. im abgeschirmten Raume waren nur noch Spuren vom Strom herrührender magnetischer Energie vorhanden. — Die gewünschten Prämissen waren also gegeben.

## 6. Spiegelartige Feldverstärkung.

Nun brachte ich die Platte derart ins Versuchsgestell ein, dass es möglich war, mittels der Tastpule den mit der geschirmten Stelle correspondirenden Raum nach Methode I zu untersuchen. Das Resultat dieser Abtastung ist aus Tab. IV (p. 355) ersichtlich, der ich zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit unter Columnne III\* die *verdoppelten* Werte des Feldes des freien Leiters, Columnne III, beifüge.

Ein Vergleich der Zahlwerte in Columnne III\* und VI lässt unmittelbar erkennen, dass das Feld eines auf einer genügend



Tabelle III.

Methode I. Stromstärke:  $i = 0,5$  Amp.

I	II	III	IV	V	VI
Abstand $\varphi$	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte	Feld der Platte + verändert. Feld des Leiters	Verändertes Feld des Leiters
22	+0,2	66,8	22,1	28,6	1,5
25	+0,8	56,3	21,0	22,6	1,6
30	+1,2	47,2	21,2	22,0	0,8
35	+1,2	38,8	19,5	21,0	1,5
40	+1,8	36,8	19,5	20,5	1,0
45	+2,2	33,0	15,0	18,8	3,3
50	+1,6	30,6	15,5	17,7	2,2
60	+1,7	17,6	14,0	18,6	4,6
70	+1,0	15,6	13,5	16,5	3,0
80	+1,8	15,2	11,8	14,8	3,0
90	+1,0	14,4	11,5	13,0	1,5
100	+0,9	13,0	11,5	13,0	1,5
120	+0,6	11,0	10,0	12,7	2,7
130	-0,8	10,2	10,5	12,7	2,2
140	-0,5	9,6	9,1	12,8	3,7
150	-0,2	9,3	10,0	11,7	1,7
160	-0,3	8,7	8,5	11,6	3,1
180	-1,0	8,0	8,0	9,9	1,9
200	-1,6	8,2	7,3	8,8	0,6

weichen und genügend dimensionirten Eisenplatte ruhenden geradlinigen stromdurchflossenen Leiters infolge der Anwesenheit des Ferromagneticums verdoppelt wird, d. h. letzteres wirkt so, als befände sich in der Ebene seiner vorderen Begrenzungsfläche ein zweiter, den wirklich vorhandenen nach Richtung und Grösse durchaus identischer Strom. Diesen fictiven Strom kann man in Anlehnung an die bekannte optische Erscheinung als *magnetisches Bild* bezeichnen.

Tabelle IV.

Stromstärke:  $i = 0,5$  Amp.

I	II	III	IV	V	VI	III*
$\varnothing$ mm	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte Nr. 6	Ver- ändertes Feld des Leiters + Feld der Platte,	Ver- ändertes Feld des Leiters	Feld des freien Leiters $\times 2$
20	0,21	67,7	10,4	144,8	134,4	135,4
25	0,8	57,0	10,2	122,5	112,3	114,0
30	1,2	48,25	9,0	105,1	96,1	96,5
35	1,5	39,5	6,5	85,6	79,1	79,0
40	1,7	36,0	6,3	78,8	72,5	72,0
45	2,0	30,5	10,7	73,0	62,3	61,0
50	1,8	26,25	8,9	62,1	53,2	52,5
60	1,7	20,5	14,4	57,5	48,1	41,0
70	0,9	17,4	14,1	49,1	35,0	34,8
80	1,0	15,6	15,2	45,7	30,5	31,12
90	1,0	14,35	15,3	43,5	28,2	28,7
100	0,8	12,50	7,7	33,7	26,0	25,0
110	0,7	11,0	5,8	28,8	23,0	22,0
120	0,2	10,2	6,1	26,9	20,8	20,4
130	-0,8	9,8	5,1	25,2	20,1	19,6
140	-0,4	9,6	5,4	25,2	19,8	19,2
150	-0,2	9,4	5,2	24,1	18,9	18,8
160	-0,6	8,8	5,3	23,8	18,5	17,2
170	-0,6	8,0	5,1	22,1	17,0	16,0
180	-0,9	7,95	5,5	21,7	16,2	15,9
190	-0,7	8,0	4,0	19,9	15,9	16,0
200	-1,2	7,2	5,1	19,7	14,6	14,4
210	-0,7	6,1	4,0	17,1	13,1	12,2
220	-1,0	5,5	3,0	14,1	11,1	11,0

7.

An diese Versuche schlossen sich eingehende Untersuchungen hinsichtlich der Abhängigkeit jener spiegelartigen Feldverstärkungen von der Plattenbreite, der Materialhärte und von der Intensität des Stromes im geradlinigen Leiter. Indessen stiess ich hierbei auf grosse Schwierigkeiten. Bei

schwachen Strömen trat eine wesentliche Differenzirung in gedachter Hinsicht nicht hervor, andererseits scheiterte die Anwendung stärkerer Ströme an der relativ geringen Plattenbreite; auch beeinflusste Starkstrom das überaus empfindliche Galvanometer in unangenehmster Weise. So stellte ich nach zahlreichen vergeblichen Versuchen die Untersuchungen mit dem stromdurchflossenen geradlinigen Leiter einstweilen ein, welche namentlich für die *theoretische Forschung* den Vorteil möglicher Einfachheit hatten, und wählte zur fernerer Bearbeitung meines Studienobjectes einen anderen Generator magnetischer Energie: das stromdurchflossene Solenoid. Mit diesem waren leicht grössere magnetische Dichten hervorzubringen, andererseits afficirten — falls die Solenoidlänge im Vergleich zum *Durchmesser* klein genommen wurde — seine Pole entschieden weniger leicht die Galvanometerconstanz.

#### 8. Versuche mit einem stromdurchflossenen Solenoid.

Durch freundliches Entgegenkommen der Maschinenbauanstalt J. G. Landes in München gelangte ich in den Besitz einer Eisenplatte aus sehr weichem, ausgeglühtem *Lowmoore Holzkohleneisen*, deren mechanische Eigenschaften im Verein mit den grossen Abmessungen, vergl. Tab. I, nach den früheren Erfahrungen sehr günstige Resultate erwarten liessen. Indessen bildete die mehrere Centner schwere Eisenmasse eine nicht zu unterschätzende Gefahr für die Galvanometerconstanz. Eingehende Versuche überzeugten mich aber, dass — falls ein Mindestabstand des Plattenschwerpunktes von den Galvanometersystem von 6 m gewahrt blieb. — kleinere durch die Versuchsweise bedingte laterale Verschiebungen der Platte ohne merkbaren Einfluss blieben. Um Fernwirkungen, die eventuell von dem stromdurchflossenen Solenoid ausgehen konnten, thunlichst zu vermeiden, wählte ich für dasselbe eine möglichst gedrungene Form. Zur Ermittlung der Feldstärken kamen wiederum nur die im ersten Teile besprochenen Messmethoden und als Tastspulenbahn das Solenoidinnere in Betracht. Ferner entschloss ich mich zur Vermeidung immerhin unsicherer Rechnungen zur Herstellung *zweier* möglichst identischer Solenoide, von denen das eine, als Bild des anderen betrachtet, durch geeignete Kom-

bination gestattete, die erhaltenen Resultate mit denen einer idealen Spiegelfeldverstärkung zu vergleichen.

### 9. Allgemeine Versuchsanordnung und Controleinrichtung.

Zur Strommessung im secundären Kreis diente wiederum das du Bois-Rubens'sche Galvanometer, welches indessen nun mit einem Systeme von geringerer Empfindlichkeit ausgerüstet und auf 7 sec einer vollen Amplitude astasirt wurde. Da die Empfindlichkeit astatischer Galvanometer dem allmählich abnehmenden Momente der Nadeln entsprechend mit der Zeit veränderlich ist, so war eine stete Controle der Galvano-

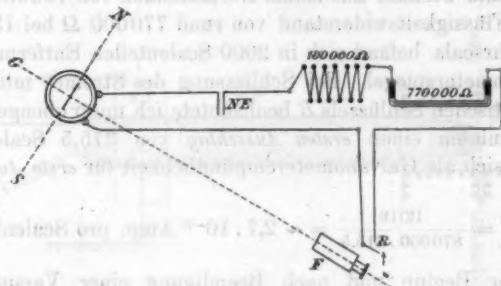


Fig. 2.

meterconstanten dringend erwünscht. Nach längeren Versuchen ergab sich die in Fig. 2 dargestellte Einrichtung, welche sich durchaus bewährte. Ihr liegt der Gedanke zu Grunde, dass eine Aenderung der Galvanometerempfindlichkeit unter sonst gleichen Umständen proportional sein muss dem durch eine constante elektromotorische Kraft bewirkten Scalenausschlag. Zur Erzeugung dieser elektromotorischen Kraft bez. zur Controle ihrer Constanz dienten zwei Normal-Weston-(Cadmium-amalgam, -sulfat)-Elemente, die nach Fertigstellung eine Klemmenspannung von 1,019 Volt aufwiesen.

Der Temperaturcoefficient der Elemente war

$$\gamma_t = -0,0000125 (t - 18^\circ),$$

die an und für sich geringen Temperaturschwankungen im Versuchsraum konnten demgemäss vernachlässigt werden. Von

diesen Elementen verwandte ich Nr. 1 (N. E.) im Galvanometer-controlkreis, während Nr. 2 in Verbindung mit einem Thomson'schen Quadrantenelektrometer zur gelegentlichen Prüfung der Konstanz des arbeitenden Elementes diente. Nach siebenmonatlicher Benutzung des Normalelementes Nr. 1 war zwischen beiden Elementen irgend ein Unterschied in der Klemmenspannung nicht nachweisbar, jedenfalls war er *kleiner* als  $\frac{1}{10000}$  Volt, die Fehlergrenze des Elektrometers.

Diese ausgezeichnete Konstanz war erreicht durch einen vorsichtigerweise vorgeschalteten Widerstand, der verhinderte, dass dem N. E. jemals Ströme von grösserer Intensität als  $\sim \frac{1}{800000}$  Ampère entnommen werden konnten. Der Vorschaltwiderstand bestand aus einem Normalealon von 100000  $\Omega$  und einem Flüssigkeitswiderstand von rund 770000  $\Omega$  bei 15°. Die Fernrohrscala befand sich in 2000 Scalenteilen Entfernung vom Galvanometerspiegel. Bei Schliessung des Stromes mittels des automatischen Schlüssels *R* beobachtete ich unter obengedachten Verhältnissen einen *ersten Ausschlag* von 315,5 Scalenteilen, sodass sich als Galvanometerempfindlichkeit für *erste Ausschläge* ergab:

$$\gamma_n = \frac{1,019}{870000 \cdot 315,5} = \sim 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ Amp. pro Scalenteil.}$$

Vor Beginn und nach Beendigung einer Versuchsreihe wurde stets die Empfindlichkeit des Galvanometers controlirt, wobei natürlich der Inconstanz des Hilfsflüssigkeitswiderstandes Rechnung getragen werden musste.

#### 10. Spezielle Versuchsanordnung.

Nachdem ich mich beim Bericht über Versuche mit einem geradlinigen Stromleiter eingehender über gewisse Versuchs-details äusserte, beginne ich hier unmittelbar mit der Beschreibung der modificirten Anordnung. Fig. 3.

Auf einem genau profilirten Grundbrette *A* glitten in sicheren Führungen die Schlitten des Hauptsolenoides *S* des Vergleichssolenoides *B* und des Tastspulensupports *T. S.* Im Tastspulensupport war der Halter *T. H.* um seine Längsaxe drehbar eingespannt. Dieser Halter trug am vorderen Ende einen Messingkopf, in dem die eigens construirte Tastspule *T*



nach bekanntem Verfahren möglichst genau in die Richtung der erdmagnetischen Inclination gebracht. Die Solenoide  $\S$  und  $\mathfrak{B}$  wurden mit grösster Sorgfalt *genau übereinstimmend* in starkem Messingblech gefertigt. Ihre Länge betrug 80, der innere Durchmesser 60 mm. Die mit peinlichster Sorgfalt hergestellte Armatur bestand aus je drei Lagen zu je 40 Windungen eines gut isolirten 1,65 mm dicken Kupferdrahtes. Der Widerstand eines jeden Solenoides betrug 0,251  $\Omega$ . Die in unmittelbarer Folge vorgenommene Durchtastung beider Solenoide lieferte den strikten Beweis, dass die Herstellung zweier *vollständig äquivalenter* magnetomotorischer Systeme gelungen war. — Die Tastspule stellte eine kleine Walze von 30 mm Durchmesser und 40 mm Länge dar. Sie war nach Werner Siemens's Doppel-T-Anker in Zink construiert. Um den mittleren Kern wickelte ich etwa 90 m eines Kupferdrahtes von 0,225 mm blankem Durchmesser. Ein dicker Ueberzug von Paraffin und Lack entzog diese Windungen thermischen Einflüssen.

#### 11. Durchführung des Versuches.

Unter Beobachtung der gewöhnlichen Kautelen: Galvanometercontrole, Erdfeld und Plattenfeldbestimmung durchtastete ich einmal das Solenoid  $\S$ , wenn die von constantem Strome durchflossenen Solenoide sich mit den entgegengesetzten Polen berührten, vgl. Columnne II der Tab. V, ein anderes Mal, wenn das zweite Solenoid  $\mathfrak{B}$  durch die obenerwähnte Eisenplatte dergestalt ersetzt war, dass die vordere Begrenzungsfläche des Hauptsolenoides die Platte etwa im Schwerpunkt ihrer Fläche berührte. Das Vergleichssolenoid wurde inzwischen an einer genügend entfernten Stelle des Primärkreises eingeschaltet, sodass die Versuchsbedingungen vollständig gewahrt blieben. Die unter diesen Umständen erzielten Resultate trug ich in Columnne III der nachstehenden Tab. V ein. Ein Vergleich der Ergebnisse der Columnen II und III lässt unmittelbar erkennen, dass die Eisenplatte genau denselben Einfluss hervorbringt wie das Vergleichssolenoid, sodass der Vorgang in seiner Totalität ein Analogon bildet zu den optischen virtuellen und aufrechten Spiegelbildern. Zu bemerken ist noch, dass in dem Raume, welcher vom sich „magnetisch spiegelnden“ Solenoide  $\S$  aus



betrachtet *hinter* der Eisenplatte lag, auch nicht eine Spur vom Solenoid herrührender magnetischer Energie nachweisbar war: es fand eine absolute Schirmwirkung statt, die a priori als wesentliches Kriterium der vermuteten Correspondenzerscheinung angesehen worden war.

Tabelle V.

Stromstärke:  $i = 0,2$  Ampère.

I	II	III
$\varrho$	Solenoid $\S$ gegen Solenoid $\S$	Solenoid $\S$ gegen Eisenplatte
20	253,2	251,5
30	250,9	251,4
40	243,1	243,0
50	230,72	228,5
60	207,8	204,6
70	173,15	172,05
80	135,4	133,2
90	96,0	94,02
100	65,4	65,3

## 12. Einfluss der mechanischen Härte.

Aeusserst wichtig erschien es zu entscheiden, ob die *mechanische Härte* bei dem spiegelartigen Verhalten eines Ferromagneticums von Einfluss sei; frühere Versuche in dieser Richtung waren — wie schon erwähnt — gänzlich fehlgeschlagen. Das Resultat dieser Betrachtung bringe ich in Tab. VI, der ich einige versuchstechnische Notizen beifüge. Die Tastspule wurde in einer Entfernung  $\varrho = 20$  mm im Hauptsolenoid  $\S$  fixirt und das Vergleichssolenoid in gleicher Weise wie beim grundlegenden Versuche (11) der Reihe nach durch die verschiedenen Platten, vergl. Tab. I ersetzt. Die klarsten Resultate erzielte ich mit den Platten Nr. 3, 4, 5 und 6, welche — wie bereits früher erwähnt — die verschiedenen Härtephasen genau gleich dimensionirter Stäbe darstellen.

Tab. VI besagt:

*Die Fähigkeit ferromagnetischer Substanz, spiegelartige Feldverstärkungen zu bewirken, ist eine Function ihrer mechanischen Härte. Sie nimmt mit Steigerung des Härtegrades ab.*

Tabelle VI.

 $\varphi = 20$  mm.

Strom- stärke Amp.	Solenoid § allein	Solenoid § gegen Solenoid	Solenoid § gegen Platte				Parallel- schluss zum Galvano- meter	Empfindlichkeits- Abtönung
			Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6		
0,25	125,6	166,5	159,2	161,5	162,4	165,1	$\infty \Omega$	310,0 : 310,0 (normal)
0,5	200,5	267,3	255,7	260,5	260,8	264,2	80 $\Omega$	310,0 : 138,5
1,0	211,6	281,5	270,0	273,6	275,0	278,7	15 $\Omega$	310,0 : 41,5
2,0	230,0	306,6	295,0	299,0	299,6	304,5	6 $\Omega$	310,0 : 18
4,0	261,0	342,0	337,0	338,5	339,3	341,5	3 $\Omega$	310,0 : 11
8,0	89,0	135,0	131,4	132,2	133,5	135,0	0 $\Omega$	310,9 : 2
20,0	259,0	348,0	338,5	341,5	341,5	346,0	0 $\Omega$	310,0 : 2

## 13. Spiegelfeldverstärkung bei schiefstehendem Solenoid.

Nun stellte ich mir die Aufgabe zu entscheiden, ob auch dann eine der optischen Spiegel analoge Feldverstärkung eintrete, wenn die Axe des stromdurchflossenen Solenoides mit der Normalen zur ferromagnetischen Platte einen Winkel bildete.

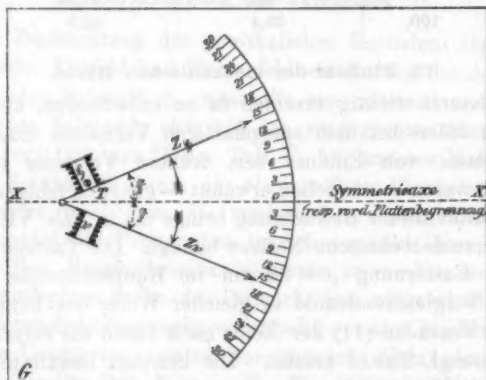


Fig. 4.

Zur Durchführung dieses interessanten Versuches wählte ich wiederum die grosse Platte, bezeichnet Nr. 7, denn diese gestattete erfahrungsgemäss die Verwendung stärkerer Primärströme, woraus wiederum die Möglichkeit resultierte, sich mit einer geringen Galvanometerempfindlichkeit zu begnügen. Ich

versah die Solenoide mit genau entsprechenden Drehzapfen  $a_5$  und  $a_8$ , vgl. vorstehende schematische Abbildung Fig. 4, und mit grossen Messingzeigern  $Z_5$  und  $Z_8$ , fixirte dieselben alsdann derartig auf der mit präziser Graduierung versehenen Grundplatte  $G$ , dass sie mit grösster Genauigkeit in die bezüglichen Spiegelbildstellungen — die Symmetrieaxe  $XX$  als spiegelnde Fläche gedacht — gebracht werden konnten. Die drehbare Tastspule  $T$  arretirte ich wiederum im Inneren des Hauptsolenoides in der Entfernung  $\rho = 20$  mm, stellte dann die — bei 1,0 Ampère Stromstärke im Solenoidkreis — an den bezüglichen Stellen vorhandene Feldstärke fest, indem ich allmählich den Winkel der Solenoide zur Symmetrieaxe ( $\alpha/2$ ) grösser und grösser wählte (Tab. VII). Alsdann trennte ich die Grundplatte  $G$  im Schnitte  $XX$  und ersetzte das Vergleichssolenoid durch die vorerwähnte Eisenplatte, sodass die vordere Plattenebene mit der früheren Symmetrieaxe  $XX$  zusammenfiel, während die sonstigen Versuchsbedingungen gewahrt blieben. Das Resultat der nun vorgenommenen Abtastung der verschiedenen Positionen ist unter Columnen III nachstehender Tabelle eingetragen.

Das Versuchsergebnis zeigt mit grösster Klarheit den spiegelartigen Einfluss eines Ferromagneticums auf das Feld eines beliebig zu ihm gelagerten von *constantem Strom* durchflossenen Solenoides. Die Galvanometerempfindlichkeit betrug  $1,2 \cdot 10^{-7}$  Ampère pro Scalenteil. Die spiegelartigen Feldverstärkungen können also unter sonst günstigen Umständen mit Galvanometern von relativ geringer Empfindlichkeit dargethan werden.

Tabelle VII.  
Stromstärke:  $i = 1,0$  Amp.

$\frac{\alpha}{2}$	Solenoid gegen Solenoid	Solenoid gegen Eisenplatte	$\frac{\alpha}{2}$	Solenoid gegen Solenoid	Solenoid gegen Eisenplatte
0°	180,2	179,2	27°	145,6	145,3
3	173,7	172,0	33	144,6	144,0
6	165,9	165,0	39	141,9	141,8
9	161,3	160,7	45	138,4	138,1
12	156,0	156,0	51	137,0	137,2
15	152,0	153,15	60	136,6	136,6
21	148,2	149,09			

## 14. Kaleidoskopartige Feldverstärkung.

Es wurde gezeigt, dass das von einem geradlinigen von constantem Strome durchflossenen Leiter herrührende Feld durch ein benachbartes Ferromagneticum derartig beeinflusst werden kann, als befände sich in der Lage des optischen Spiegelbildes ein zweiter, ersterem durchaus identischer Strom. Von höchstem Interesse war es zu entscheiden, ob die auffallende Identität der optischen und magnetischen Erscheinungen soweit gehe, dass bei Zusammenstellung mehrerer ferromagnetischer Platten Erscheinungen aufträten, die beim Licht als *Winkelspiegelbilder* bekannt sind.

Zur Beantwortung dieser Frage schlug ich den Weg ein, der sich aus vorläufig dunkeln Ursachen stets bewährte, gewissermaassen das Ideal der vermuteten Erscheinung zu konstruieren und die in der Realität erhaltenen Resultate mit dem Ergebnis am idealen Apparat zu vergleichen.

Zu dem Zwecke verband ich die Eisenplatten Nr. 6 und 7, die ja die in Rede stehende Eigenschaft in hohem Maasse gezeigt hatten, mittels kräftiger Schraubzwingen zu einem Eisenwinkel von  $90^\circ$  Oeffnung, in dem der geradlinige Leiter  $L$  genau in der Halbirungsaxe ausgespannt wurde (Fig. 5). Dann construirte ich mir mit grösster Sorgfalt den „*Idealapparat*“, ein Holzgestell, welches vier in jeder Hinsicht dem geradlinigen Stromleiter  $L$  identische Kupferdrähte enthielt, die genau die Lagen optischer Spiegelbilder — die inneren Winkelflächen als Spiegelebenen gedacht — einnahmen. Vgl. Fig. 6.

Die in Betracht kommenden Maasse sind den schematischen Figg. 5 und 6 eingeschrieben. Die durch ihre Projection wiedergegebenen Leiter  $L^*$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  waren durch Drillen sorgfältigst gestreckt, sie waren den Plattenlängen entsprechend je 1,5 m lang. Die Feldmessung erfolgte mit der früher bereits erwähnten Tastspule, die zu diesem Zwecke auf ein kleines Böckchen geschraubt, und so mit grösster Präcision in eine bestimmte Lage sowohl zum geradlinigen Leiter  $L$  als  $L^*$  zu bringen war. Der secundäre Messstrom wurde durch Oeffnen und Schliessen des Primärstromes erzeugt, sodass eine Eigenbewegung der Spule vermieden war. Die Durchführung einer

Versuchsreihe gestaltete sich folgendermaassen. Nach Abtönung der Galvanometerempfindlichkeit auf  $2,7 \cdot 10^{-8}$  Ampère pro Scalenteil bestimmte ich, wie bei den früheren Untersuchungen, das „Feld des freien Leiters“ für  $\varrho = 13$  mm. Nach Feststellung dieser Feldstärke (Tab. VIII, Columne II) brachte ich den stromdurchflossenen Leiter und mit ihm die Tastspule in den auf 14 mm präcisirten Abstand von einer Eisenplatte und stellte durch mehrfachen Stromschluss die nun vorhandene Feldstärke

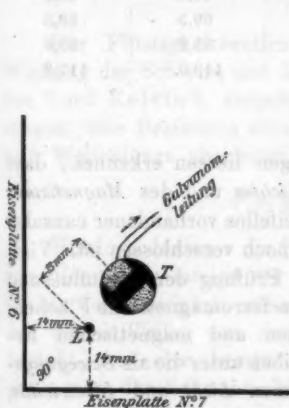


Fig. 5.

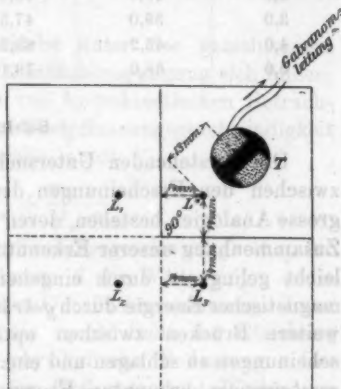


Fig. 6.

fest (Tab. VIII, Columne III). Dann nahm ich unter sonst gleichen Bedingungen die Abtastung vor, wenn sich der Stromleiter in der durch Fig. 5 gekennzeichneten Stellung im Eisenwinkel befand (Columne IV). Schliesslich maass ich die durch die vier Parallelströme — vergl. Fig. 6 — an der entsprechenden Stelle im Idealapparat erzeugte Feldstärke, vgl. Tab. VIII, Columne V, und führte den Gesamtversuch für fünf verschiedene Stromstärken unter sorgsamer Beobachtung aller Controlmaassregeln durch. Die auf einwandfreie Weise erhaltenen Resultate der Tabelle weisen die Existenz kaledoskopartiger Wirkung eines Winkels aus ferromagnetischem Materiale auf in demselben befindliche magnetische Energie überzeugend nach (Tab. VIII).

Tabelle VIII.

I	II	III	IV	V
Stromstärke i ... Amp.	Feld des freien Leiters	Feld des freien Leiters, verstärkt durch Platte 1	Feld des Leiters im Winkel	Feld des Leiters im Idealapparat
1,0	13,5	16,12	23,8	23,6
2,0	25,5	33,0	46,0	46,2
3,0	39,0	47,5	69,5	69,5
4,0	45,2	63,2	93,2	93,9
5,0	68,0	79,1	119,0	117,3

**Schluss.**

Die vorstehenden Untersuchungen liessen erkennen, dass zwischen den Erscheinungen des *Lichtes* und des *Magnetismus* grosse Analogien bestehen, deren zweifellos vorhandener causaler Zusammenhang unserer Erkenntnis noch verschlossen ist. Vielleicht gelingt es durch eingehende Prüfung der Beeinflussung magnetischer Energie durch *gekrümmte* ferromagnetische Flächen, weitere Brücken zwischen optischen und magnetischen Erscheinungen zu schlagen und einzureihen unter die als *Bewegungserscheinungen* erkannten Energieformen *Licht* und *Electricität*, die Kraft, die heute in zahllosen Anwendungen in Wissenschaft und Technik dem Wohle und Ruhme der Nationen dient.

München, December 1900.

(Eingegangen 12. December 1900.)

10. *Experimentelle Bestimmung  
von Capillaritätsconstanten condensirter Gase;  
von Leo Grunmach.*

[Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin  
mitgeteilt vom Verfasser.<sup>1)</sup>]

Für Flüssigkeitswellen, welche unter der gemeinsamen Wirkung der Schwere und der Oberflächenspannung sich bilden, hat Lord Kelvin<sup>2)</sup>, ausgehend von hydrokinetischen Betrachtungen, eine Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge abgeleitet, welche lautet

$$v^2 = g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\alpha}{\sigma}.$$

Hierin bedeuten  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit,  $g$  die Beschleunigung infolge der Schwere,  $\lambda$  die Wellenlänge,  $\sigma$  die Dichte der Flüssigkeit und  $\alpha$  deren Oberflächenspannung. Jeder der beiden Teile, aus denen die rechte Seite der Gleichung besteht, hat eine bestimmte physikalische Bedeutung. Der erste, von der Schwere abhängige Teil entspricht Wellen von grösserer Wellenlänge, die vorwiegend von der Schwere und nur in geringem Grade von der Oberflächenspannung abhängig sind, während der zweite Teil für Capillarwellen gilt, die, von der Schwere nahezu unabhängig, in ihrem Entstehen und Fortbestehen fast nur durch die Oberflächenspannung bedingt sind. Für solche Capillarwellen lässt sich daher der erste von der Schwere herrührende Teil vernachlässigen, sodass man für sie erhält

$$v^2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\alpha}{\sigma},$$

und wenn man  $v = n\lambda$  setzt, wo  $n$  die Schwingungszahl bedeutet,

$$\alpha = \frac{n^2 \lambda^3 \sigma}{2\pi}.$$

1) L. Grunmach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Gesamtsitzung vom 26. Juli 1900.

2) W. Thomson, Phil. Mag. 42. p. 368. 1871.



Auf diese Weise lässt sich also die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit bestimmen, wenn Dichte, Schwingungszahl und Wellenlänge bekannt sind.

Um Capillarwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche bequem zu erzeugen, taucht man nach dem Vorgange von Hrn. L. Matthiessen<sup>1)</sup> eine Stimmgabel von hoher Schwingungszahl, deren Zinken mit feinen Spitzen versehen sind, mit diesen in die Flüssigkeit 1–2 mm tief ein und bringt sie zum Tönen. Es entstehen dann auf der Niveaufläche um die Spitzen als Centren zwei fortschreitende Kreiswellensysteme und zwischen den Spitzen ein System stehender, hyperbelförmiger, in der Axe äquidistanter Interferenzwellen, deren Knoten und Bäuche sich durch die Spiegelwirkung der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche als scharfe dunkle und helle Linien abheben.

Die Genauigkeit der Bestimmung der Capillarconstante hängt, da in der Gleichung für dieselbe die Grössen  $n$  und  $\lambda$  in der zweiten, bez. in der dritten Potenz auftreten, vorzugsweise von der Genauigkeit ab, mit welcher  $n$  und besonders  $\lambda$  gemessen werden können. In einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> habe ich gezeigt, in welcher Weise ich bemüht gewesen bin, die Methode zu einer Präcisionsmessmethode auszugestalten, insbesondere durch Construction und Anwendung eines geeigneten Mikrometernikroskops, eine genaue Wellenlängebestimmung zu ermöglichen.

Nachdem ich dann eine grössere Reihe von Flüssigkeiten und von geschmolzenen und schmelzenden Metallen nach dieser Methode untersucht<sup>3)</sup>, schien es mir wünschenswert und wichtig, zu versuchen, ob sie mit Erfolg auch zur Bestimmung der *Capillarconstanten condensirter Gase* angewandt werden könne.

Ueber diesen, für die Untersuchungen der Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes wichtigen Gegenstand liegen in der physikalischen Literatur nur spärliche Angaben vor, und doch ist die Kenntniss gerade der Capillarconstanten condensirter Gase für die nähere Erforschung des kritischen Zustandes derselben von grosser Bedeutung. Erst in den

1) L. Matthiessen, Wied. Ann. 35. p. 118. 1889.

2) L. Grunmach, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 13. 1899; Ann. d. Phys. 3. p. 660. 1900.

3) l. c. p. 18, bez. p. 665.

letzten Jahren sind im Verfolg der Untersuchungen des Hrn. van der Waals auf dessen Anregung Messungen der Variationen capillarer Steighöhen von flüssiger Kohlensäure und von flüssigem Stickstoffoxydul innerhalb eines gewissen Temperaturintervalles (von  $-25^{\circ}$  bis etwa  $+30^{\circ}$  C.) ausgeführt worden von Hrn. Verschaffelt<sup>1)</sup>, um festzustellen, ob auch für diese Substanzen das Aenderungsverhältnis der molecularen Oberflächenenergie mit der Temperatur denselben constanten Wert besitzt, welchen zuerst Hr. R. von Eötvös<sup>2)</sup> sowohl aus theoretischen Betrachtungen gefolgert, wie auch auf experimentellem Wege nach der von ihm ersonnenen „Reflexionsmethode“ für eine grössere Reihe einfach zusammengesetzter Flüssigkeiten abgeleitet hat. Diese Methode besteht darin, dass die von zwei Lichtpunkten herrührenden und vom Flüssigkeitsmeniscus in horizontaler Richtung reflectirten Strahlen im Fernrohr eines Kathetometers aufgefangen werden, dass ihr verticaler Abstand kathetometrisch gemessen, ihre Neigung gegen die Oberflächennormale aus der Richtung der einfallenden Strahlen nach dem Reflexionsgesetze bestimmt und aus diesen Daten die Capillarconstante berechnet wird. Als besonderen Vorzug dieser Methode hebt Hr. von Eötvös hervor, dass es mittels derselben möglich sei, Capillarconstanten von Flüssigkeiten, die beliebig lange in zugeschmolzenen Glasröhren aufbewahrt waren, zu bestimmen, und dass es ihm auch gelungen sei, die Capillarconstanten condensirter Gase zu bestimmen, ohne in dessen irgend welche hierauf bezüglichen Beobachtungen mitzuteilen. Von anderen Forschern sind meines Wissens Messungen auf diesem Gebiete bisher nicht ausgeführt worden. Durch die vorliegende Arbeit glaube ich nun nachweisen zu können, dass die Anwendung der Capillarwellenmethode es ermöglicht, Capillarconstanten condensirter Gase mit derselben Genauigkeit zu bestimmen wie die gewöhnlicher Flüssigkeiten.

Der Untersuchung sind von mir zunächst vier condensirte Gase unterworfen worden: verflüssigte schweflige Säure, die sogenannte Pictet'sche Flüssigkeit (nach den Angaben von

1) J. Verschaffelt, Zittingsversl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam p. 74. 1895/96; l. c. p. 94. u. 175. 1896/97; Commun. from the Phys. Labor. Leiden Nr. 18. 1895; Nr. 28 und 32. 1896.

2) R. von Eötvös, Wied. Ann. 27. p. 448. 1886.

Hrn. Raoul Pictet ein Gemisch von 64 Gewichtsteilen schwefliger Säure auf 44 Gewichtsteile Kohlensäure), verflüssigtes Ammoniak und verflüssigtes Chlor.

Die Versuche mit verflüssigter schwefliger Säure und mit der Pictet'schen Flüssigkeit, welche in Siphonflaschen mit regulirbarem Schraubenventil von der „Gesellschaft für flüssige Gase“ (Raoul Pictet) als chemisch rein bezogen wurden, habe ich im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule, diejenigen mit verflüssigtem Ammoniak und mit verflüssigtem Chlor im Chemischen Laboratorium der Kunheim'schen Fabrik in Niederschönweide bei Berlin ausgeführt.<sup>1)</sup>

Die Versuchsanordnung und die Beobachtungsart war dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen.<sup>2)</sup> Die condensirten Gase, welche unmittelbar vor dem Beginn der Versuche durch mehrere Filter filtrirt worden waren, befanden sich in geeigneten, genügend weiten und tiefen Porzellanschalen, die ihrerseits wieder in Kältemischungen aus fester Kohlensäure und abgekühltem Alkohol, bez. bei den Versuchen mit verflüssigtem Ammoniak (um die Bildung von kohlensaurem Ammoniak zu verhindern) in einer Chlorcalciummischung standen, die durch ein Kohlensäuregemisch bis auf  $-70^{\circ}$  C. abgekühlt werden konnte. Es ist notwendig, die Schalen bis zum Rande mit den condensirten Gasen zu füllen, weil sonst infolge der starken Abkühlung der in der Luft enthaltene Wasserdampf zu Schnee condensirt und die Flüssigkeitsoberfläche leicht durch Hereinfallen des Schnees gestört werden kann.

Durch solche hereinfliegende Schneepartikelchen würde übrigens im allgemeinen nicht die Oberflächenspannung der untersuchten verflüssigten Gase verändert, sondern nur, wenn sie in die Nähe der schwingenden Stimmgabelspitzen geraten, die Ausbildung der Wellensysteme gestört werden. Während nämlich in dem verflüssigten, specifisch sehr leichten Ammoniak

---

1) Ich benutze diese Gelegenheit, den Besitzern der Fabrik für das lebenswürdige Entgegenkommen, mit welchem sie mir nicht nur die verflüssigten Gase in beliebiger Menge, sondern auch den Hauptsaal des Laboratoriums für die Zeit meiner Versuche zur Verfügung gestellt haben, ebenso Hrn. Obergeringenieur Dr. Lange für seine freundliche Unterstützung auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

2) L. Grunmach, l. c. p. 17, bez. p. 664.

das sich etwa auf der Oberfläche condensirende und gefrierende Wasser sofort niedersinken würde, würden sich sowohl bei der verflüssigten schwefligen Säure wie beim verflüssigten Chlor Hydrate bilden, welche in den verflüssigten Gasen unlöslich sind und sich als krystallinische Massen abscheiden, und welche zur Verzerrung der Interferenzcurven Veranlassung geben, wofern sie nicht aus dem sichtbaren Bereich des Wellensystems fortgefeht werden.

Bei der verflüssigten, auf etwa  $-60^{\circ}$  C. abgekühlten schwefligen Säure ist folgender Versuch wiederholentlich ausgeführt worden, um festzustellen, ob ihre Oberflächenspannung durch Wasser, welches auf der Oberfläche sich hätte condensiren können, geändert würde: Nach Erregung der Stimmgabel, scharfer Ausbildung des Wellensystems und genauer Einstellung auf zwei beliebige, symmetrisch zur Axe gelegene Interferenzcurven wurde Wasser aus einer Pipette auf die Niveaufläche getropft. Beim Auffallen der Tropfen tritt eine Gleichgewichtsstörung ein; noch bevor dieselbe aber abgelaufen, ist der Tropfen erstarrt, das Wellensystem tritt wieder deutlich hervor, ohne dass die Stimmgabel von Neuem erregt zu werden braucht, Lage und Abstand der Interferenzcurven erscheinen nahezu unverändert. Allen verflüssigten Gasen eigentümlich ist, wohl infolge ihrer grossen Beweglichkeit, das lange Andauern der einmal auf ihnen erregten Schwingungen.

Vor und nach jeder Beobachtungsreihe der Wellenlängen wurde mit dem Mikrometermikroskop die Entfernung der Stimmgabelspitzen ausgemessen und diese andererseits mittels des Horizontalcomparators auf das Genaueste bestimmt. Die Temperaturen wurden mittels eines von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt untersuchten und beglaubigten Alkoholthermometers von Fuess vor und nach jeder Beobachtungsreihe bestimmt. Die Differenz der Temperaturen beim Beginn und Schluss einer Versuchsreihe schwankte in der Regel um etwa  $2^{\circ}$  C.; nur bei den Versuchen mit Chlor erreichte sie einmal den Maximalwert  $6^{\circ}$  C.

Ich gehe nunmehr zur Mitteilung der Beobachtungen und deren Ergebnisse über; die hier folgenden Werte der halben Wellenlänge  $\lambda$  sind die Mittelwerte aus je 10 Beobachtungsreihen, von denen jede Einzelbeobachtung 10 Intervalle umfasst.

## 1. Verflüssigte schweflige Säure.

Spitzenentfernung = 2515,7 p (Mikrometerpartes) = 2,0419 cm;  
 halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) = 79,772 p  $\pm$  0,138 p; mittlere Temperatur der verflüssigten schwefligen Säure =  $-25^{\circ}\text{C}$ .; mittlere Temperatur der Stimmgabel =  $+14,26^{\circ}\text{C}$ .

Aus der von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt für die Schwingungszahl der Stimmgabel ermittelten Gleichung

$$n_t = 253,13 - 0,025(t - 19,1^{\circ})$$

ergibt sich

$$n_{14,26} = 253,25.$$

Aus diesen Daten berechnet sich die spezifische Cohäsion  $\alpha_{-25}$  der schwefligen Säure zu 44,3325. Zur Bestimmung der Oberflächenspannung

$$\alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma$$

ist die Kenntnis der Dichte  $\sigma$  der schwefligen Säure bei  $-25^{\circ}\text{C}$ . erforderlich. Dichtebestimmungen für schweflige Säure sind ausgeführt worden von J. Pierre<sup>1)</sup>, indessen nur bis zur Temperatur  $-20,5^{\circ}\text{C}$ ., für welche  $\sigma = 1,4911$  beobachtet worden ist. Durch Extrapolation mit Hilfe des in der Nähe von  $-20^{\circ}\text{C}$ . von Pierre bestimmten Ausdehnungskoeffizienten 0,001496 erhält man für die Dichte bei  $-25^{\circ}\text{C}$ .

$$\sigma_{-25} = 1,5012.$$

In neuerer Zeit haben die Herren Cailletet und Mathias<sup>2)</sup> die Dichte der schwefligen Säure bis zu  $-12^{\circ}\text{C}$ . untersucht. Extrapoliert man unter Zugrundelegung der von ihnen mitgeteilten Curve, welche den Zusammenhang zwischen Dichte und Temperatur darstellt, und welche von  $-5^{\circ}$  bis  $-12^{\circ}\text{C}$ . nahezu geradlinig verläuft, so erhält man als Dichte bei  $-25^{\circ}\text{C}$ . fast übereinstimmend mit dem aus den Beobachtungen von Pierre extrapolierten Werte

$$\sigma_{-25} = 1,502.$$

Nimmt man deshalb für  $\sigma_{-25}$  den Mittelwert 1,5016 an, so ergibt sich für die *Capillarconstante der schwefligen Säure* bei  $-25^{\circ}\text{C}$ . der Wert

$$\alpha_{-25} = \frac{1}{2} a^2 \sigma_{-25} = 33,285 \text{ Dynen/cm.}$$

1) J. J. Pierre, Ann. de chim. et phys. (3) 21. p. 336. 1847.

2) L. Cailletet u. E. Mathias, Compt. rend. 104. p. 1563. 1887.

## 2. Pictet'sche Flüssigkeit.

a) Als chemisch rein bezogen von der Gesellschaft für flüssige Gase (Raoul Pictet).

Spitzenentfernung = 2349,6 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) = 75,776 p  $\pm$  0,131 p; mittlere Temperatur der Flüssigkeit =  $-33^{\circ}$  C., mittlere Temperatur der Stimmgabel =  $+13^{\circ}$  C.

$$n_{13} = 253,28.$$

Hieraus ergibt sich die spezifische Cohäsion der Pictet'schen Flüssigkeit

$$a_{-33}^2 = 46,628.$$

Da Dichtebestimmungen der Pictet'schen Flüssigkeit nicht bekannt gegeben sind — solche sollen zwar in umfangreicher Weise im Pictet'schen Laboratorium ausgeführt worden sein, das Beobachtungsmaterial ist aber leider bei einem Brande verloren gegangen —, so habe ich sie selbst mit einer guten Mohr'schen Waage ausgeführt und  $\sigma_{-33} = 1,504$  gefunden. Bei Annahme dieses Wertes berechnet sich die *Capillarconstante der Pictet'schen Flüssigkeit bei  $-33^{\circ}$  C. zu*

$$a_{-33} = 35,065 \text{ Dynen/cm.}$$

b) Eine zweite Bestimmungsreihe wurde ausgeführt mit vor etwa 15 Jahren von Hrn. Pictet selbst dargestellter Pictet'scher Flüssigkeit, welche mir Hr. Pictet damals für andere Untersuchungen freundlichst überlassen hatte, und welche seitdem in einer zugeschmolzenen Glasröhre aufbewahrt worden war. Für diese ergab sich die spezifische Cohäsion bei  $-60^{\circ}$  C.

$$a_{-60}^2 = 48,964,$$

die Dichte bei  $-60^{\circ}$  C.

$$\sigma_{-60} = 1,564$$

und demgemäss die *Capillarconstante bei  $-60^{\circ}$  C.*

$$a_{-60} = 38,209 \text{ Dynen/cm.}$$

## 3. Verflüssigtes Ammoniak

(welches höchstens 0,1 Proc. Verunreinigung enthält, aber nicht durch Wasser, sondern vielleicht durch Pyridin).

Spitzenentfernung = 2271,1 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) = 101,685 p  $\pm$  0,481 p; mittlere Temperatur des ver-



flüssigten Ammoniaks =  $-29^{\circ}\text{C.}$ , mittlere Temperatur der Stimmgabel =  $+22,35^{\circ}\text{C.}$

$$n_{22,35} = 253,05.$$

Hieraus berechnet sich die spezifische Cohäsion

$$a_{-29}^2 = 124,638;$$

die Dichte des verflüssigten Ammoniaks beträgt bei  $-29^{\circ}\text{C.}$

$$\sigma_{-29} = 0,6703.^1)$$

Demgemäss ergibt sich die *Capillarconstante des verflüssigten Ammoniaks* bei  $-29^{\circ}\text{C.}$

$$\alpha_{-29} = 41,778 \text{ Dynen/cm.}$$

#### 4. Verflüssigten Chlor.

Spitzenentfernung =  $2199 \text{ p} = 2,0419 \text{ cm.}$ ; halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) =  $67,94 \text{ p} \pm 0,497 \text{ p.}$ ; mittlere Temperatur des verflüssigten Chlors =  $-72^{\circ}\text{C.}$ , mittlere Temperatur der Stimmgabel =  $+18,44^{\circ}\text{C.}$

$$n_{18,44} = 253,15.$$

Hieraus berechnet sich die spezifische Cohäsion bei  $-72^{\circ}\text{C.}$

$$a_{-72}^2 = 40,973;$$

die Dichte des verflüssigten Chlors bei  $-72^{\circ}\text{C.}$  beträgt nach den Beobachtungen von Hrn. Knietsch<sup>2)</sup>

$$\sigma_{-72} = 1,6452.$$

Demnach ergibt sich die *Capillarconstante des verflüssigten Chlors* bei  $-72^{\circ}\text{C.}$

$$\alpha_{-72} = 33,649 \text{ Dynen/cm.}$$

Die Bestimmungen der Capillarconstanten haben eine erhöhte wissenschaftliche Bedeutung gewonnen, seitdem Hr. R. v. Eötvös<sup>3)</sup>, wie bereits oben angedeutet wurde, angeregt durch die van der Waals'schen Untersuchungen eine rationelle Begründung des Zusammenhanges zwischen Oberflächenspannung und Molecularvolumen gegeben und aus seinen Beobachtungen, wie aus denjenigen R. Schiff's, für eine grosse Reihe einfach zusammengesetzter Flüssigkeiten die Beziehung

1) A. Lange, Zeitschr. f. d. gesamte Kälteindustrie 5. p. 20. 1898.

2) R. Knietsch, Liebig's Ann. 259. p. 100. 1890.

3) R. v. Eötvös, l. c.



abgeleitet hat, dass der Differentialquotient der molecularen Oberflächenenergie nach der Temperatur,  $\partial(\alpha v^{1/3})/\partial t$ , innerhalb weiter Grenzen von der Temperatur unabhängig ist und den constanten Wert 2,27 hat, und dass die moleculare Oberflächenenergie selbst

$$\alpha v^{1/3} = 2,27 (\theta - t)$$

ist, wo  $\theta$  die kritische und  $t$  die Beobachtungstemperatur bedeutet. Diese Gleichung, welche durch die umfangreichen Untersuchungen der Herren Ramsay und Shields<sup>1)</sup> im wesentlichen bestätigt und nur wenig modificirt worden ist, und welche eine vollkommene Analogie für die Zustandsgleichung idealer Gase bildet, gewährt die Möglichkeit, die Moleculargrösse unvermischter Flüssigkeiten zu bestimmen, wenn deren Oberflächenspannung bekannt ist. Es ergibt sich nämlich aus ihr für das Moleculargewicht  $M$  die Gleichung

$$M = \sigma \sqrt{\left(\frac{2,27(\theta - t)}{\alpha}\right)^3}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wird durch meine Beobachtungen an verflüssigter schwefliger Säure und an verflüssigtem Ammoniak bestätigt. Denn setzt man in dieselbe als kritische Temperaturen für schweflige Säure, bez. für Ammoniak die Werte  $157^\circ \text{C.}$ <sup>2)</sup>, bez.  $130,5^\circ \text{C.}$ <sup>3)</sup>, als Oberflächenspannungen bei den Beobachtungstemperaturen  $-25^\circ \text{C.}$ , bez.  $-29^\circ \text{C.}$  die oben gefundenen Werte 33,285, bez. 41,778 und endlich für die Dichten bei diesen Temperaturen die Werte 1,5016, bez. 0,6703 ein, so erhält man als Werte für das Moleculargewicht der verflüssigten schwefligen Säure

$$M_{\text{SO}_2} = 1,5016 \sqrt{\left(\frac{2,27(157 + 25)}{33,285}\right)^3} = 65,66$$

1) W. Ramsay u. J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chem. 12. p. 433. 1893.

2) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Sajotschewski (Beibl. 3. p. 741. 1879), Ladenburg (Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 11. p. 818. 1878), Drion (Ann. chim. phys. (3) 56. p. 221. 1859), Clark Phil. Mag. (5) 10. p. 149. 1880), Schuck (Beibl. 6. p. 86. 1882), Cailletet und Mathias (Compt. rend. 104. p. 1563. 1887).

3) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Dewar (Phil. Mag. (5) 18. p. 210. 1884) und Vincent u. Chappuis (Journ. de phys. (2) 5. p. 58. 1886).

und des verflüssigten Ammoniaks

$$M_{H,N} = 0,6703 \sqrt{\left(\frac{2,27(190,5 + 29)}{41,778}\right)^3} = 17,10,$$

in guter Uebereinstimmung mit ihren Werten für den gasförmigen Zustand, nämlich 64,06, bez. 17,07.

Dagegen wird die Gleichung durch meine Beobachtungen am verflüssigten Chlor nicht erfüllt. Denn setzt man in dieselbe für die kritische Temperatur als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Dewar<sup>1)</sup>, Ladenburg<sup>2)</sup>, Knietsch<sup>3)</sup> den Wert 145° C., für die Oberflächenspannung den bei -72° C. gefundenen Wert 33,649 und für die Dichte den Wert 1,6452 ein, so erhält man als Moleculargewicht für das verflüssigte Chlor den Wert

$$M_{Cl} = 1,6452 \sqrt{\left(\frac{2,27(145 + 72)}{33,649}\right)^3} = 92,14,$$

während er für das gasförmige 70,9 ist. Das verflüssigte Chlor scheint sich also nicht wie eine normale, sondern wie eine associirende Flüssigkeit zu verhalten, die in flüssigem Zustand ein höheres Moleculargewicht hat wie in gasförmigem.

Der Einwand, dass diese Abweichung vielleicht eine Folge der Condensation des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes sei, ist nicht stichhaltig, denn es ist bereits (p. 371) hervorgehoben worden, dass die Folge der Condensation die Bildung eines im verflüssigten Chlor unlöslichen Chlorhydrates sein würde, welches sich in krystallinischen Massen ausscheidet. Gesetzt aber auch, das verflüssigte Chlor werde an seiner Oberfläche durch daselbst sich condensirendes Wasser verunreinigt, dann würde seine Oberflächenspannung  $\alpha$  offenbar dadurch vergrößert werden, und sein Moleculargewicht müsste, da in der Formel  $\alpha$  unter dem Wurzelzeichen im Nenner steht, kleiner ausfallen als das Moleculargewicht im gasförmigen Zustande, während das Gegentheil beobachtet wird. Des weiteren müsste das Moleculargewicht des verflüssigten Chlors mit steigender Temperatur zunehmen, was gleichfalls der Beobachtung nicht entspricht. Ich habe nämlich am verflüssigten

1) J. Dewar, Phil. Mag. (5) 18. p. 210. 1884.

2) A. Ladenburg, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 11. p. 818. 1878.

3) R. Knietsch, l. c.

Chlor auch bei höheren Temperaturen, nämlich in der Nähe von  $-60^{\circ}$  und sogar von  $-50^{\circ}\text{C.}$ , Capillaritätsbestimmungen ausgeführt, aus denen hervorzugehen scheint, dass sein Moleculargewicht mit steigender Temperatur abnimmt und sich dem des gasförmigen immer mehr nähert. Indessen waren die Beobachtungen infolge der starken Chlorgasentwicklung für Augen und Atmungsorgane und auch für die Stimmgabel zu angreifend (vom verflüssigten Chlor wurden die Stimmgabelspitzen gar nicht angegriffen), als dass ich sie genügend lange hintereinander hätte fortsetzen können, um sichere Beobachtungswerte zu erlangen. Die Versuche werden bei Anwendung geeigneter Schutzvorrichtungen innerhalb weiterer Temperaturgrenzen fortgeführt und auf andere condensirbare Gase ausgedehnt werden.

(Eingegangen 18. December 1900.)

**11. Bewegung eines elektrischen Teilchens  
in einem Felde elektrostatischer und elektro-  
magnetischer Kraft;  
von Eduard Riecke.**

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Im Jahre 1881 habe ich in den „Göttinger Nachrichten“ und in „Wiedemann's Annalen“ eine Untersuchung über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde veröffentlicht.<sup>1)</sup> Die gefundenen Gesetze haben später durch die an die Erscheinung der Kathodenstrahlen sich knüpfenden Maassbestimmungen erhöhte Bedeutung gewonnen. Mit Rücksicht auf verschiedene Erscheinungen, bei denen elektrische und magnetische Wirkungen im Spiele sind, schien es mir nützlich, die frühere Untersuchung auf den Fall auszudehnen, dass ein homogenes elektrisches Feld mit einem homogenen magnetischen sich überlagert.

1. Die ponderable Masse des betrachteten elektrischen Teilchens sei  $\mu$ , seine elektrische Ladung  $\varepsilon$ ; seine Coordinaten in einem rechtwinkligen System  $x, y, z$ . Das elektrostatische Potential sei gegeben durch  $V = -Ax - By - Cz$ ; die ganze Intensität des elektrischen Feldes sei  $F$ ; das magnetische Potential sei  $P = -Ax - By - Cz$ ; die ganze Intensität des magnetischen Feldes sei  $\mathfrak{H}$ ,  $v$  sei die Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegungsgleichungen sind:

$$(1) \quad \begin{cases} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{v} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dy}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{v} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dz}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{v} \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \right\}. \end{cases}$$

1) E. Riecke, Göttinger Nachr., 2. Febr. 1881; Wied. Ann. 13. p. 192. 1881.

2. Das Integral der lebendigen Kraft ist gegeben durch:

$$\frac{\mu}{2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = -\varepsilon V + \text{const.}$$

Wir bezeichnen mit  $ds$  das Element der von dem Teilchen  $\varepsilon$  durchlaufenen Bahn, dann ist

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Setzen wir ferner die Bahngeschwindigkeit des Teilchens

$$\frac{ds}{dt} = \sigma,$$

so lässt sich das Integral der Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$(2) \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{2\varepsilon}{\mu} (V_0 - V),$$

wo  $\sigma_0$  der Wert der Bahngeschwindigkeit, welcher dem Potential  $V_0$  entspricht. So oft die Bahn des Teilchens dieselbe Potentialfläche schneidet, ist auch seine Geschwindigkeit wieder dieselbe.

3. Führen wir an Stelle der Potentiale  $V$  und  $P$  die Componenten der elektrostatischen und der magnetischen Kräfte ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon A - \frac{\varepsilon}{v} \left\{ B \frac{dz}{dt} - C \frac{dy}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon B - \frac{\varepsilon}{v} \left\{ C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon \Gamma - \frac{\varepsilon}{v} \left\{ A \frac{dy}{dt} - B \frac{dx}{dt} \right\}. \end{cases}$$

4. Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , so ergibt sich durch Addition:

$$\mu \left\{ A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{d^2 y}{dt^2} + C \frac{d^2 z}{dt^2} \right\} = \varepsilon (AA + BB + C\Gamma)$$

oder

$$(4) \quad \mu \frac{d^2}{dt^2} \{Ax + By + Cz\} = \varepsilon (AA + BB + C\Gamma).$$

Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung der magnetischen Kraftlinien  $\mathfrak{H}$ , und den Radiusvector  $r$  nach dem Teilchen  $\varepsilon$ ; wir legen durch dieses Teilchen eine Ebene senkrecht zu der Richtung  $\mathfrak{H}$ . Sie schneidet

diese in einem Punkt  $h$ , dessen Abstand vom Anfangspunkt des Coordinatensystems durch denselben Buchstaben  $h$  bezeichnet werden soll. Dann ist

$$h = r \left\{ \frac{A}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{x}{r} + \frac{B}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{y}{r} + \frac{C}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{z}{r} \right\},$$

$$(5) \quad h \cdot \mathfrak{F} = Ax + By + Cz.$$

Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (4), so ergibt sich:

$$(6) \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}).$$

Der Punkt  $h$  rückt somit auf der den magnetischen Kraftlinien parallelen Axe  $\mathfrak{F}$  mit gleichförmiger Beschleunigung fort.

5. Multipliciren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit  $A, B, \Gamma$ , so ergibt sich durch Addition:

$$\mu \left\{ A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{d^2 y}{dt^2} + \Gamma \frac{d^2 z}{dt^2} \right\} = \varepsilon \mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A & B & \Gamma \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix},$$

oder:

$$(7) \quad \mu \frac{d^2}{dt^2} \{Ax + By + \Gamma z\} = \varepsilon \mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v} \cdot \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix}.$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe unterliegt einer ganz ähnlichen Interpretation, wie der analoge Term des vorhergehenden Paragraphen. Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung  $\mathfrak{F}$  der elektrostatischen Kraftlinien. Durch die augenblickliche Lage des Teilchens  $\varepsilon$  legen wir eine Ebene senkrecht zu der Richtung  $\mathfrak{F}$ ; sie schneide diese letztere in einem Punkt  $f$ , dessen Abstand von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems gleich  $f$  sei. Dann ist:

$$(8) \quad f \mathfrak{F} = Ax + By + \Gamma z.$$

Wir erhalten daher die Gleichung:

$$(8') \quad \mu \mathfrak{F} \frac{d^2 f}{dt^2} = \varepsilon \mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v} \cdot \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix}.$$

6. Von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems aus ziehen wir eine Linie  $N$  so, dass sie senkrecht steht auf  $\mathfrak{S}$  und auf  $\mathfrak{F}$ , und so, dass die Reihenfolge  $N, \mathfrak{S}, \mathfrak{F}$  gleichsinnig ist mit der Reihenfolge der Axen  $x, y, z$ . Die Richtungscosinusse von  $N$  seien  $v_1, v_2, v_3$ ; dann ist:

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho v_1 = B\Gamma - CB, \\ \varrho v_2 = CA - A\Gamma, \\ \varrho v_3 = AB - BA, \end{cases}$$

wo:

$$(9') \quad \varrho = \mathfrak{S} \mathfrak{F} \sin(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}).$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit  $\varrho v_1, \varrho v_2, \varrho v_3$ , so ergibt sich durch Addition:

$$\begin{aligned} \frac{v}{s} \cdot \mu \varrho \frac{d^2}{dt^2} (v_1 x + v_2 y + v_3 z) = & - \left( B \frac{dx}{dt} - C \frac{dy}{dt} \right) (B\Gamma - CB), \\ & - \left( C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt} \right) (CA - A\Gamma), \\ & - \left( A \frac{dy}{dt} - B \frac{dz}{dt} \right) (AB - BA). \end{aligned}$$

Wir legen durch die jeweilige Lage des Teilchens  $s$  eine Ebene senkrecht zu der Linie  $N$ ; ihr Schnittpunkt mit  $N$  sei  $n$ , der Abstand des Punktes  $n$  vom Anfangspunkt des Coordinatensystems sei  $n$ ; dann ist:

$$(10) \quad n = v_1 x + v_2 y + v_3 z$$

und wir erhalten die Gleichung:

$$(10') \quad \mu \sin(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{dt^2} = - \frac{s \mathfrak{F}}{v} \frac{df}{dt} + \frac{s \mathfrak{S}}{v} \cos(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}) \frac{dh}{dt}.$$

7. Setzen wir in Gleichung (10) für  $v_1, v_2, v_3$  ihre Werte aus Gleichung (9) und (9'), so ergibt sich:

$$\mathfrak{S} \mathfrak{F} \sin(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}) \cdot n = \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix}.$$

Substituieren wir diesen Wert der Determinante in Gleichung (8'), so ergibt sich:

$$(11) \quad \mu \frac{d^2 f}{dt^2} = s \mathfrak{F} + \frac{s}{v} \cdot \mathfrak{S} \sin(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}) \frac{dn}{dt}.$$



Differentiiren wir die Gleichung (10') nach (2), so erhalten wir:

$$\mu \sin(\xi, \eta) \frac{d^2 n}{dt^2} = -\frac{e \xi}{v} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{e \eta}{v} \cos(\xi, \eta) \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Benutzen wir hier den Wert von  $d^2 h/dt^2$  aus Gleichung (6), so wird:

$$\mu \sin(\xi, \eta) \frac{d^2 n}{dt^2} = \frac{e^2}{v \mu} \xi \eta \cos^2(\xi, \eta) - \frac{e}{v} \eta \frac{d^2 f}{dt^2}.$$

Setzen wir für  $d^2 f/dt^2$  den aus Gleichung (11) folgenden Wert, so ergibt sich die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung von  $n$ :

$$(12) \quad \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{e^2}{v^2 \mu^2} \cdot \xi^2 \frac{dn}{dt} = -\frac{e^2}{v \mu^2} \xi \eta \sin(\xi, \eta).$$

8. Aus Gleichung (6) ergibt sich:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{e}{\mu} \eta \cos(\xi, \eta) t + c_h^0,$$

wo  $c_h^0$  den Anfangswert der Geschwindigkeit  $dh/dt$  bezeichnet. Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (10'), so wird:

$$\begin{aligned} \mu \sin(\xi, \eta) \frac{d^2 n}{dt^2} &= -\frac{e \xi}{v} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{e^2}{v \mu} \xi \eta \cos^2(\xi, \eta) t \\ &\quad + \frac{e c_h^0}{v} \xi \cos(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Differentiiren wir nun die Gleichung (11) nach (7), so wird:

$$\mu \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{e}{v} \eta \sin(\xi, \eta) \frac{d^2 n}{dt^2},$$

und mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{e^2}{v^2 \mu^2} \xi^2 \frac{df}{dt} = \frac{e^2}{v^2 \mu^2} \xi^2 \cos(\xi, \eta) \left\{ \frac{e}{\mu} \eta \cos(\xi, \eta) t + c_h^0 \right\}$$

die Differentialgleichung zur Bestimmung von  $f$ .

9. Die Integration von Gleichung (12) giebt:

$$(14) \quad n = -\frac{\xi}{\eta} \sin(\xi, \eta) v t + a_1 \sin \frac{e \xi}{v \mu} t + b_1 \cos \frac{e \xi}{v \mu} t + \gamma_1.$$

wo  $a_1$ ,  $b_1$  und  $\gamma$  Integrationsconstanten sind.

Gleichung (13) giebt:

$$(15) \quad \begin{cases} f = \frac{e \tilde{\gamma} \cos^2(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})}{2\mu} \left\{ t^2 - \frac{2v^2\mu^2}{e^2\tilde{\gamma}^2} \right\} + c_h^0 \cos(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) t \\ \quad + a_2 \sin \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t + b_2 \cos \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t + \gamma_2. \end{cases}$$

Damit Gleichung (11) erfüllt wird, muss

$$a_2 = b_1 \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) \quad \text{und} \quad b_2 = -a_1 \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})$$

sein.

Setzt man nun

$$a_1 = d \sin \delta, \quad b_1 = d \cos \delta,$$

so wird

$$(16) \quad \begin{cases} n = -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) v t + d \cos \left( \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t - \delta \right) + \gamma_1, \\ f = \frac{e \tilde{\gamma} \cos^2(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})}{2\mu} \left\{ t^2 - \frac{2v^2\mu^2}{e^2\tilde{\gamma}^2} \right\} + c_h^0 \cos(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) t \\ \quad + d \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) \sin \left( \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t - \delta \right) + \gamma_2. \end{cases}$$

Die Richtungen  $\tilde{\gamma}$  und  $N$  stehen aufeinander senkrecht; wir können also  $n$  und  $f$  als rechtwinklige Coordinaten behandeln in einem ebenen System, dessen Axen durch  $\tilde{\gamma}$  und  $N$  gegeben sind. Nun ist für  $t = 0$ :

$$f_0 = -\frac{v^2\mu}{e} \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^2} \cos^2(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) - d \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) \sin \delta + \gamma_2,$$

$$n_0 = d \cos \delta + \gamma_1.$$

Machen wir durch Parallelverschiebung des Systems:

$$f_0 = -d \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) \sin \delta,$$

$$n_0 = -d \cos \delta,$$

so wird:

$$\gamma_2 = \frac{v^2\mu}{e} \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^2} \cos^2(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}), \quad \gamma_1 = 0,$$

und damit:

$$(16') \quad \begin{cases} f = \frac{e \tilde{\gamma} \cos^2(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})}{2\mu} t^2 + c_h^0 \cos(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) t \\ \quad + d \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) \sin \left( \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t - \delta \right), \\ n = -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) v t + d \cos \left( \frac{e\tilde{\gamma}}{v\mu} t - \delta \right). \end{cases}$$

10. Ueber den Charakter der durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curve wird man sich am einfachsten

orientiren, wenn man  $f$  und  $n$  in je zwei Teile zerlegt. Wir setzen:

$$(17) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{\varepsilon \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2\mu} t^2 + c_h^1 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t, \\ n_1 = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \cdot \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) v t; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} f_2 = d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin\left(\frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right), \\ n_2 = d \cos\left(\frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right), \end{cases}$$

sodass:

$$f = f_1 + f_2, \quad n = n_1 + n_2.$$

Bezeichnen wir den Punkt der  $\mathfrak{F}N$ -Ebene, welcher durch die Coordinaten  $f$  und  $n$  bestimmt ist, mit  $\Pi$ , so kann  $\Pi$  in folgender Weise construirt werden. Wir setzen erst die Coordinaten  $f_1$  und  $n_1$  zusammen und erhalten so den Punkt  $P$ ; dann ziehen wir von  $P$  aus die Coordinaten  $f_2$  und  $n_2$ , der aus ihrer Zusammensetzung sich ergebende Punkt ist  $\Pi$ .

Aus den Gleichungen (17) folgt für die von dem Punkt  $P$  beschriebene Curve die Gleichung:

$$f_1 = \frac{\varepsilon}{2\mu v^2} \frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{F}} \cotg^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) n_1^2 - \frac{c_h^0}{v} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}} \cotg(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) n_1.$$

Die Curve ist eine Parabel. Die Coordinaten ihres Scheitelpunktes sind:

$$f_1^0 = -\frac{c_h^0^2}{2} \frac{\mu}{\varepsilon \mathfrak{F}}, \quad n_1^0 = \frac{c_h^0 v \mu}{\varepsilon \mathfrak{H}} \tg(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Die Scheiteltangente der Parabel ist parallel der Axe  $N$ . Die Parabel geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems  $\mathfrak{F}, N$ , und zwar liegt der in Betracht kommende Zweig derselben in dem Winkel zwischen der positiven  $\mathfrak{F}$ -Axe und der negativen  $N$ -Axe.

Wenn der Winkel  $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}$  gleich Null ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien mit den elektrostatischen zusammenfallen, so degenerirt die Parabel in die Axe  $\mathfrak{F}$  oder  $\mathfrak{H}$ . Wenn der Winkel  $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}$  gleich einem rechten ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien auf den elektrostatischen senkrecht stehen, so fällt die Parabel zusammen mit der Axe  $N$ . Von dem Nullpunkt des Systems  $\mathfrak{F}, N$  an gerechnet bewegt sich der Punkt  $P$  auf der negativen  $N$ -Axe.

11. Aus den Gleichungen (18) folgt:

$$(20) \quad \frac{f\dot{\xi}}{d^2 \sin^2(\xi, \zeta)} + \frac{n^2}{d^2} = 1.$$

Haben wir für irgend eine Zeit die Lage von  $P$  auf der von ihm beschriebenen Parabel bestimmt, so liegt  $\Pi$  auf einer Ellipse, deren Centrum  $P$  ist, deren grosse Axe  $d$  parallel ist mit  $N$ , deren kleine Axe  $d \sin(\xi, \zeta)$  parallel ist mit  $\zeta$ .

Man kann diese Ellipse in bekannter Weise construiren mit Hülfe zweier Kreise, die um  $P$  mit den Halbmessern  $d$  und  $d \sin(\xi, \zeta)$  beschrieben werden. Lässt man den bei der Construction benutzten Radiusvector in der Secunde  $\varepsilon \zeta / 2\pi v \mu$  Umläufe machen, so erhält man ein vollständiges Bild von der elliptischen Bewegung des Punktes  $\Pi$ . Bezeichnen wir die Umlaufszeit mit  $T$ , so ist:

$$T = \frac{2\pi v \mu}{\varepsilon \zeta}.$$

Um die wirkliche Bewegung von  $\Pi$  in der Ebene  $\zeta N$  zu finden, muss man den Mittelpunkt  $P$  der Ellipse in einer der Umlaufsbewegung entsprechenden Weise auf seiner Parabel weiterrücken lassen. Die Curve, welche auf diese Weise entsteht, hat einen cykloidenartigen Charakter.

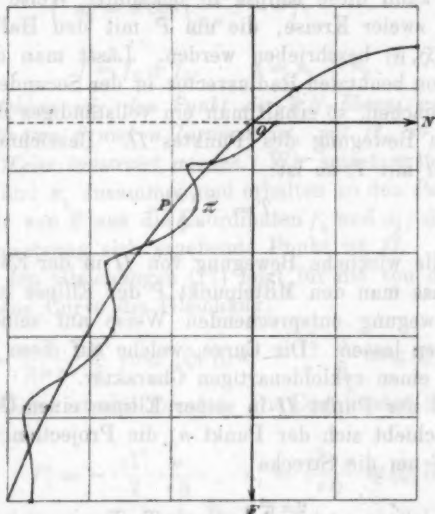
So oft der Punkt  $\Pi$  in seiner Ellipse einen Umlauf vollzieht, verschiebt sich der Punkt  $n$ , die Projection von  $\Pi$  auf die Axe  $N$  um die Strecke

$$- \frac{2\pi v^2 \mu}{\varepsilon \zeta} \cdot \frac{\zeta}{\xi} \sin(\xi, \zeta).$$

Auf Grund dieser Bemerkung kann man von der durch den Punkt  $\Pi$  beschriebenen Curve das folgende Bild (vgl. Figur, p. 386) entwerfen.

Um die räumliche Bewegung des elektrischen Teilchens  $\varepsilon$  zu erhalten, muss man gleichzeitig mit dem Punkte  $\Pi$  der Ebene  $\zeta N$  den früher eingeführten Punkt  $h$  in der Axe  $\xi$  sich bewegen lassen. Mit  $\Pi$  verbindet man ein auf der Ebene  $\zeta N$  senkrecht stehendes Lot, mit  $h$  eine zu der Axe  $\xi$  senkrechte Ebene; die jeweilige Lage des Teilchens  $\varepsilon$  wird dann durch den Schnitt der Ebene mit dem Lote bestimmt. Die so erzeugte Curve hat einen schraubenartigen Verlauf.

12. *Specielle Fälle.* Wenn der Winkel  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{S}$  ein rechter ist, so geht die Parabel über in die Axe  $N$ . Zugleich werden die Axen der von dem Punkt  $II$  beschriebenen Ellipse einander gleich, die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis. Der Punkt  $II$  beschreibt in diesem Falle eine gewöhnliche Cykloide, deren Axe durch den negativen Ast der Axe  $N$  gegeben ist. Die Beschleunigung in der Richtung der Axe  $\mathfrak{S}$  ist Null. Wenn also auch die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens  $c\mathfrak{S}$  Null



ist, so beschränkt sich die ganze Bewegung auf die Ebene  $\mathfrak{F}N$ ; man kommt dann zu dem folgenden eigentümlichen Resultat. Wenn die elektrischen und die magnetischen Kraftlinien zu einander senkrecht stehen, und das Teilchen  $e$  keine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Axe  $\mathfrak{S}$  besitzt, so bewegt es sich in einer *Cykloide*, deren Axe senkrecht steht zu den magnetischen und zu den elektrischen Kraftlinien, also im wesentlichen in einer zu den beiden Kräften transversalen Richtung.

Wenn die Richtungen der magnetischen und der elektrostatischen Kraftlinien zusammenfallen, so ist es zweckmässiger, auf die ursprünglichen Gleichungen zurückzugehen. Wenn

man die Richtung der Kraftlinien mit der Richtung der  $x$ -Axe zusammenfallen lässt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = e \mathfrak{E}, \quad \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{r} \mathfrak{H} \frac{dz}{dt}, \quad \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{r} \mathfrak{H} \frac{dy}{dt}.$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung der  $x$ -Axe und aus einer Kreisbewegung in der Ebene  $yz$  mit der Umlaufzeit  $2\pi v \mu / e \mathfrak{H}$ . Die Bahn ist eine Schraube mit wachsender Höhe der Gänge.

13. Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung dürften Anwendung finden auf die Erscheinungen in der Nähe der Kathode, auf die Veränderung, insbesondere die Neubildung der Schichten unter magnetischer Wirkung, sowie auf die Erscheinung des Nordlichtes.

(Eingegangen 23. December 1900.)

## 12. Ueber Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen; von Eduard Riecke.

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Als eine besonders merkwürdige und rätselvollere Erscheinung hat man von jeher die Schichtenbildung in Geissler'schen Röhren betrachtet. Sie zeigt, dass die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Ionen der Länge der Röhre nach in periodischer Weise wechseln, hier ansteigen, dort sinken können. Mit einer Wellenbewegung im gewöhnlichen Sinne hat die Erscheinung nichts zu thun, denn die Elemente der Strömung zeigen an einer und derselben Stelle der Röhre keinen periodischen Wechsel. Viel wahrscheinlicher ist es, dass die Schichtenbildung eine Begleiterscheinung der Strömung ist; ihr Analogon sind nicht die Kundt'schen Staubfiguren, sondern die Anschwellungen und Einschnürungen eines unter hohem Druck austretenden Gasstrahles, und der periodische Wechsel der Dichtigkeit, welcher damit verbunden ist. Es ist nicht unmöglich, dass zwischen dieser Ausströmungserscheinung und der Schichtung eines elektrischen Funkens ein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Für die Strömung elektrischer Teilchen in einem homogenen elektrischen Felde bot sich zunächst eine andere Möglichkeit der Schichtung, welche im Folgenden entwickelt ist.<sup>1)</sup>

1. Es sei ein homogenes elektrisches Feld von der Intensität  $\mathfrak{E}$  gegeben; in diesem bewegen sich in der Richtung der Kraftlinien gleichartige elektrische Teilchen so, dass in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene die Geschwindigkeit aller Teilchen die gleiche ist. Die elektrischen Teilchen be-

1) Erst nach dem Abschluss der vorliegenden Arbeit wurde ich mit einer auf denselben Gegenstand gerichteten Arbeit des Hrn. G. W. Walker im Phil. Mag. vom Juni 1900 bekannt. Hr. Walker geht aus von den Gleichungen der kinetischen Gastheorie und findet eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential, deren Lösung ein periodisches Glied enthält.



wegen sich unter den Wirkungen der äusseren Kraft  $\mathfrak{F}$  und der zwischen den Teilchen selbst vorhandenen inneren elektrodynamischen Kräfte. Ausserdem aber sei das elektrische Feld von einem neutralen Mittel erfüllt, dessen Einfluss auf die Bewegung sich in einer der Geschwindigkeit der Teilchen proportionalen Reibungskraft geltend macht.

Da die Bewegung aller in parallelen Linien sich bewegenden Teilchen dieselbe ist, so beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung eines einzigen. Die positive Richtung der Kraftlinien, in welcher sich dieses Teilchen bewegt, machen wir zur  $x$ -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Es sei nun an irgend einer Stelle der  $x$ -Axe die Geschwindigkeit des Teilchens gleich Null. Vermöge der Beschleunigung, welche dem Teilchen von der Kraft  $\mathfrak{F}$  erteilt wird, bewegt es sich in der Richtung der  $x$ -Axe mit wachsender Geschwindigkeit. Der Bewegung wirkt aber die der Geschwindigkeit proportionale Reibung entgegen. Man wird also annehmen dürfen, dass von einem bestimmten Punkt der  $x$ -Axe mit der Abscisse  $x_0$  die Geschwindigkeit keine sehr grosse Veränderung mehr erleidet. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf dieses Gebiet einer wenig veränderlichen Geschwindigkeit.

2. *Die elektrodynamischen Wechselwirkungen.* Bei der Berechnung der elektrodynamischen Wechselwirkungen werden wir das *Gesetz von Clausius* zu Grunde legen, welches von J. J. Thomson auch aus der Maxwell'schen Theorie abgeleitet worden ist.

Die Kraft, welche ein im Punkte  $x, y, z$  befindliches Teilchen von der Ladung  $e$  von einem zweiten Teilchen  $e_1$  an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$  erleidet, habe in der Richtung der  $x$ -Axe die Componente  $\Xi$ . Die Geschwindigkeitscomponenten der Teilchen seien  $u, v, w$  und  $u_1, v_1, w_1$ . Nach dem Gesetze von Clausius ist dann:

$$\frac{1}{e e_1} \Xi = - \frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} \{u u_1 + v v_1 + w w_1\} - k \frac{d}{dt} \{\psi u_1\}.$$

$\psi$  ist bei Clausius gleich der reciproken Entfernung der beiden Teilchen; wir setzen voraus, dass  $\psi$  nur in grösserer Entfernung übergeht in  $1/r$ , dass aber in kleiner Entfernung die Werte von  $\psi$  selbst und von seinen Differentialquotienten

sehr viel grösser seien, als die Werte von  $1/r$  und von den Differentialquotienten von  $1/r$ . Die Constante  $k$  ist gleich dem Quadrat der reciproken Lichtgeschwindigkeit.

In unserem Falle sind die Geschwindigkeiten  $v, w, v_1, w_1$  gleich Null und daher:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\epsilon \epsilon_1} \Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} u u_1 - k \frac{d}{dt} (\psi u_1), \\ \frac{1}{\epsilon \epsilon_1} \Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} u_1^2 - k \psi \frac{du_1}{dt}. \end{cases}$$

Um nun die Wirkung zu berechnen, welche das Teilchen  $\epsilon$  von allen umgebenden Teilchen erleidet, beschreiben wir um  $\epsilon$  eine Kugel, deren Radius so genommen werde, dass die Wirkungen der ausserhalb liegenden Teilchen vernachlässigt werden können. Die Rechnung gestaltet sich übersichtlicher, wenn wir die elektrischen Ladungen  $\epsilon_1$  der einzelnen wirkenden Teilchen gleichmässig über den umgebenden Raum ausbreiten, sodass das ganze Innere der Kugel stetig mit elektrischer Masse erfüllt ist. Die räumliche Dichte  $\eta_1$  der Ladung betrachten wir dann als eine Function der Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$ . Die von allen in unserer Kugel befindlichen Teilchen  $\epsilon_1$  auf  $\epsilon$  ausgeübte Wirkung können wir dann so berechnen, dass wir einmal die Dichte  $\eta_1$  als constant, dagegen die Geschwindigkeit  $u_1$  als veränderlich betrachten, während wir das andere Mal umgekehrt die Geschwindigkeit constant, die Dichte veränderlich setzen.

Ein Volumenelement der Kugel sei  $dw_1$ , dann ergibt sich für die von ihm herrührende X-Componente:

$$\frac{\Xi}{\epsilon} = -\frac{d\psi}{dx} \eta_1 dw_1 + k u_1^2 \frac{d\psi}{dx} \eta_1 dw_1 - k \psi \frac{du_1}{dt} \eta_1 dw_1.$$

Hier ist:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{x-x_1}{r} = -\chi(x-x_1).$$

Nehmen wir zuerst an, dass  $u_1$  constant gleich  $u$  sei, so ist in der Kugel auch  $du_1/dt$  gleich Null, und es wird:

$$\frac{\Xi}{\epsilon} = + (1 - k u^2) \chi(x-x_1) \eta_1 dw_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$\eta_1 = \eta + \frac{d\eta}{dx} (x_1 - x).$$

Somit:

$$\frac{\Xi'}{\epsilon} = + (1 - k u^2) \chi (x - x_1) \left\{ \eta + \frac{d\eta}{dx} (x_1 - x) \right\} dw_1.$$

Für die Gesamtwirkung aller in unserer Kugel befindlichen Teilchen ergibt sich mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\sum \frac{\Xi'}{\epsilon} = - (1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1.$$

Solange  $ku^2$  kleiner als 1, ist die Kraft negativ, wenn  $d\eta/dx$  einen positiven Wert hat.

Wir setzen nun zweitens die Dichte  $\eta_1$  constant gleich  $\eta$  und betrachten die Geschwindigkeit  $u_1$  als veränderlich. Dann erhalten wir:

$$\frac{\Xi''}{\epsilon} = \eta \chi (x - x_1) dw_1 - k \eta \chi (x - x_1) u_1^2 dw_1 - k \eta \psi \frac{du_1}{dt} dw_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_1^2 = u^2 + \frac{du^2}{dx} (x_1 - x),$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dt} \right) (x_1 - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) (x_1 - x)^2.$$

Setzen wir diese Werte ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\Xi''}{\epsilon} &= \eta \chi (x - x_1) dw_1 - \eta k u^2 \chi (x - x_1) dw_1 \\ &\quad + \eta k \frac{du^2}{dx} \chi (x - x_1)^2 dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{du}{dt} \psi dw_1 - \eta k \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dt} \right) \psi (x_1 - x) dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{\psi}{2} (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Für die von allen Teilchen der Kugel auf  $\epsilon$  ausgeübte Wirkung erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Xi''}{\epsilon} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1 - k \eta \frac{du}{dt} \sum \psi dw_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$u dt = dx,$$

somit:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx}.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung findet man:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\varepsilon''}{s} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \cdot \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{1}{2} \psi \right\} dw_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^3 u^2}{dx^3} \cdot \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Wir führen nun für die im vorhergehenden gefundenen Summen die Bezeichnungen ein:

$$(2) \quad \begin{cases} P = \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1, & Q = \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{\psi}{2} \right\} dw_1, \\ R = \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{cases}$$

Dann wird die ganze elektrische Kraft, welche das Teilchen  $\varepsilon$  von den Nachbarteilchen erleidet, gegeben durch:

$$(2') \quad \begin{cases} X = -P\varepsilon(1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^3 u^2}{dx^3}. \end{cases}$$

3. Im stationären Zustande muss die Zahl der Teilchen, welche in 1 sec durch eine zu den Strömungslinien senkrechte Fläche von 1 qcm hindurchgehen, allenthalben dieselbe sein. Dasselbe gilt dann auch von der Menge der in einer Secunde durch jene Fläche gehenden Elektrizität, von der elektrischen Strömung  $i$ . Auf der anderen Seite ist die Menge der Elektrizität, welche in einer Secunde durch die Flächeneinheit hindurchgeht, gleich  $\eta u$ ; wir haben also die Beziehung:

$$(3) \quad \eta u = i,$$

wo  $i$  die constante Stärke der elektrischen Strömung ist.

4. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Teilchens  $\varepsilon$  werden wir jetzt in der folgenden Form aufstellen:

$$(4) \quad \begin{cases} \mu \frac{du}{dt} = \varepsilon \mathfrak{E} - P\varepsilon(1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^3 u^2}{dx^3} - \varrho u. \end{cases}$$

Der letzte Term der rechten Seite entspricht der Reibung des elektrischen Teilchens an den in dem Felde vorhandenen neutralen Moleculen. Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\eta = \frac{i}{u} \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx},$$

so ergibt sich:

$$R k \epsilon i \frac{1}{u} \frac{d^2 u^2}{dx^2} + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{Q k \epsilon i}{u} \right) \frac{du^2}{dx} - P \epsilon i \frac{1 - k u^2}{u^2} \frac{du}{dx} + \rho u = \epsilon \tilde{\mathfrak{F}}.$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$u = u_0 + u,$$

wo  $u$  gegen  $u_0$  sehr klein sein soll. Vernachlässigen wir die Quadrate von  $u/u_0$  gegen 1, so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 R k \epsilon i \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \mu u_0 - 2 Q k \epsilon i \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) \right. \\ \left. - P \epsilon i \frac{1 - k u_0^2 - 2 u/u_0}{u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \rho \left( u + u_0 - \frac{\epsilon \tilde{\mathfrak{F}}}{\epsilon} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir hier auch noch  $u/u_0$  gegen 1, so erhalten wir:

$$(5) \quad \begin{cases} 2 R k \epsilon i \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \mu u_0 - (2 Q - P) k \epsilon i - \frac{P \epsilon i}{u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \rho \left( u + u_0 - \frac{\epsilon \tilde{\mathfrak{F}}}{\epsilon} \right) = 0, \end{cases}$$

oder:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \frac{\rho}{2 R k \epsilon i} \left( u + u_0 - \frac{\epsilon \tilde{\mathfrak{F}}}{\epsilon} \right) = 0. \end{cases}$$

Wir führen die weiteren Abkürzungen ein:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2},$$

$$q = \frac{\rho}{2 R k \epsilon i},$$

dann wird die Gleichung (5):

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + q \left( u + u_0 - \frac{\epsilon \tilde{\mathfrak{F}}}{\epsilon} \right) = 0.$$

Wir machen den Ansatz:

$$u + u_0 = \frac{\varepsilon \tilde{y}}{q} + C e^{\gamma x},$$

dann ergibt sich zur Bestimmung von  $\gamma$  die Gleichung

$$(7) \quad \gamma^3 + p\gamma + q = 0.$$

Setzen wir weiter:

$$(8) \quad \begin{cases} M^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \\ N^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \end{cases}$$

so sind die drei Werte von  $\gamma$ :

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_1 = M + N, \\ \gamma_2 = -\frac{M+N}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} (M-N), \\ \gamma_3 = -\frac{M+N}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} (M-N). \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass  $(q/2)^2 + (p/3)^3$  einen positiven Wert besitzt; dann sind  $M$  und  $N$  reell;  $N$  ist sicher negativ, der absolute Wert von  $M$  ist jedenfalls kleiner als der absolute Wert von  $N$ , somit ist  $M+N$  negativ,  $M-N$  dagegen positiv. Wir setzen:

$$(10) \quad M + N = -\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (M - N) = \beta \pi.$$

Dann sind die drei Wurzeln:

$$(11) \quad \gamma_1 = -\alpha, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha}{2} + i\beta\pi, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha}{2} - i\beta\pi.$$

Das Integral der Gleichung (6) wird:

$$u + u_0 = \frac{\varepsilon \tilde{y}}{q} + C_1 e^{-\alpha x} + (C_2 e^{i\beta\pi x} + C_3 e^{-i\beta\pi x}) e^{\frac{\alpha}{2} x}.$$

Bezeichnen wir die ganze Geschwindigkeit des Teilchens  $s$  wie früher durch  $u$ , so kann das gefundene Integral auf die Form gebracht werden:

$$(12) \quad \begin{cases} u = \frac{\varepsilon \tilde{y}}{q} \{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}\} + u_0 e^{-\alpha(x-x_0)} \\ \quad + \alpha e^{\frac{\alpha}{2}(x-x_0)} \sin \pi \beta (x-x_0). \end{cases}$$

Es ist dann für  $x = x_0$ :  $u = u_0$ ; das periodische Glied verschwindet für:

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \frac{1}{\beta}, \quad x = x_0 + \frac{2}{\beta}, \dots,$$

es ist also  $1/\beta$  die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes.

Für grosse Werte von  $x - x_0$  ist in den Punkten, für welche das periodische Glied verschwindet:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}.$$

Unserer Voraussetzung nach darf  $u_0$  nicht sehr verschieden sein von  $\varepsilon \mathfrak{F}/\varrho$ .

Setzen wir

$$x - x_0 = \frac{n}{2\beta},$$

wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl sein soll, so wird:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \right\} + u_0 e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \pm a e^{\frac{\alpha n}{4\beta}}.$$

Die Gleichung (12) gilt nur innerhalb eines Gebietes, in welchem auch diese Geschwindigkeit nur wenig abweicht von  $u_0$ , in dem also  $a e^{\alpha n/4\beta}$  klein bleibt gegen  $u_0$ .

An Stelle von  $x$  führen wir endlich noch eine andere Veränderliche  $\xi$  ein, durch die Gleichung:

$$(13) \quad \xi = \beta(x - x_0),$$

d. h. wir benutzen die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes als neue Längeneinheit. Dann wird die Gleichung für die Geschwindigkeit, wenn wir gleichzeitig mit  $u_0$  dividiren:

$$(13') \quad \frac{u}{u_0} = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho u_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} \right\} + e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} + \frac{a}{u_0} e^{\frac{\alpha}{2\beta} \xi} \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeiten sind in dieser Formel ausgedrückt als Vielfache der Anfangsgeschwindigkeit  $u_0$ , von welcher sie der Voraussetzung nach immer nur wenig abweichen.

5. Wir benutzen die Werte von  $\xi$  als Abscissen und repräsentiren die Werte von  $u/u_0$  durch eine Curve, indem wir sie



als Ordinaten senkrecht zu den entsprechenden Werten von  $\varepsilon$  auftragen. Die Curve  $u/u_0$  stellt sich dann als eine Superposition zweier Curven dar. Die erste ist eine Exponentialcurve, welche zwischen dem Anfangswert 1 und dem davon nur wenig verschiedenen Endwert  $\varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}/\rho u_0$  verläuft; die zweite Curve ist eine Sinuslinie mit stetig wachsender Amplitude; die halbe Wellenlänge dieser Sinuslinie ist gleich  $1/\beta$ .

Die elektrische Dichte ist nach Gleichung (3) gegeben durch:

$$\eta = \frac{i}{u} = \frac{i}{u_0} \cdot \frac{u_0}{u} = \eta_0 \frac{u_0}{u},$$

wenn wir mit  $\eta_0$  die anfängliche Dichte bezeichnen.

Zeichnet man also eine Curve, welche die reciproken Werte von  $u/u_0$  darstellt, so giebt diese Curve zugleich ein Bild von der Verteilung der elektrischen Dichte in dem durchströmten Felde. Die Curve der elektrischen Dichte entsteht hiernach gleichfalls aus der Superposition einer Exponentialcurve und einer Wellenlinie; die halbe Wellenlänge der letzteren ist wieder gegeben durch  $1/\beta$ .

Nun war  $\beta$  gegeben durch:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} (M - N).$$

Es war ferner:

$$M^2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}, \quad N^2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

$$q = \frac{\rho}{2 R k \varepsilon i}, \quad p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}.$$

Hiernach wächst  $\beta$ , wenn  $\mu$  und  $\rho$  zunehmen; es nimmt ab, wenn der Quotient  $i/u_0$ , d. h. die anfängliche elektrische Dichte  $\eta_0$  zunimmt. Umgekehrt nimmt die Wellenlänge des periodischen Gliedes ab, wenn  $\mu$  und  $\rho$  wachsen; sie nimmt zu, wenn die anfängliche Dichte  $\eta_0$  wächst.

3. *Strömung im reibungslosen Felde.* Haben wir keine Reibung in dem elektrischen Felde, so wird die allgemeine Gleichung der Bewegung:

$$(14) R k \varepsilon i \frac{1}{u} \frac{d^2 u^2}{dx^2} + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u} \right) \frac{du^2}{dx} - P \varepsilon i \frac{1 - k u^2}{u^2} \frac{du}{dx} = \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}.$$

Wenn die Geschwindigkeit  $u$  auch in diesem Falle nur wenig von einem anfänglichen Wert  $u_0$  abweicht, so gilt die speciellere Gleichung:

$$(14') \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} = \frac{\epsilon \mathfrak{F}}{2 R k \epsilon i}.$$

Setzen wir wie früher:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}$$

und

$$r = \frac{\epsilon \mathfrak{F}}{2 R k \epsilon i},$$

so wird die Gleichung:

$$(14'') \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} = r.$$

Machen wir den Ansatz:

$$u = \frac{r}{p} x + a e^{zx} + \text{const.},$$

so ergibt sich zur Bestimmung von  $z$ :

$$(15) \quad z^2 + p = 0.$$

Ist  $p$  positiv, was bei grossen Werten von  $u_0$  im allgemeinen zutreffen wird, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung imaginär. Erinnern wir uns, dass die ganze Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens gegeben ist durch  $u = u_0 + u$ , so kann die Lösung auf die Form gebracht werden:

$$(16) \quad u = u_0 + \frac{r}{p}(x - x_0) + a \sin \sqrt{p}(x - x_0),$$

oder, wenn wir  $\sqrt{p}(x - x_0) = \pi \xi$  setzen:

$$(16') \quad u = u_0 + \frac{r\pi}{p\sqrt{p}} \cdot \xi + a \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeit  $u$  setzt sich aus drei Termen zusammen; der erste ist gleich der constanten Anfangsgeschwindigkeit; dazu kommt ein mit der Veränderlichen  $\xi$  wachsender

Term und endlich ein periodisches Glied, dessen halbe Wellenlänge gegeben ist durch  $\xi = 1$  oder durch:

$$x - x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{p}}.$$

Die Wellenlänge nimmt ab, wenn die Masse  $\mu$  zunimmt.

Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten  $u_0$  wird  $p$  negativ;  $p = -p'$ . Die Differentialgleichung ist dann:

$$(17) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - p' \frac{du}{dx} = r$$

und ihre Lösung:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + u = u_0 - \frac{r(x-x_0)}{p'} \\ &+ a \left\{ e^{\sqrt{p'}(x-x_0)} - e^{-\sqrt{p'}(x-x_0)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit ist in diesem Falle ein aperiodischer.

Hierin scheint ein charakteristischer Unterschied der Bewegungen mit Reibung und ohne Reibung zu liegen. Im letzteren Falle verschwinden die periodischen Anwandlungen der Bewegung, sobald  $p$  negativ wird. Wenn Reibung vorhanden ist, so ist das nicht der Fall, die Periodicität erhält sich, solange nur  $(p/2)^2 + (p/3)^2$  positiv bleibt. Erst wenn diese Grösse negativ wird, fallen die periodischen Anwandlungen weg.

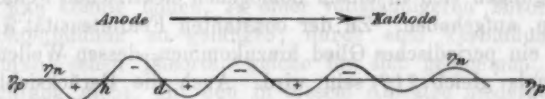
Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass die Gleichungen (16) und (18) immer nur innerhalb sehr beschränkter Gebiete anwendbar sind; denn das mit  $x - x_0$  proportionale Glied bedingt eine stetige Vergrößerung der Differenz, welche zwischen der jeweils vorhandenen Geschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit  $u_0$  besteht. Diese Differenz sollte aber nach unserer Voraussetzung nur klein sein.

#### 7. Elektrische Doppelströmung in Geissler'schen Röhren.

In einer Geissler'schen Röhre kann man das elektrische Feld zwischen der Anode und dem dunkeln Zwischenraume als ein im wesentlichen constantes betrachten. In diesem Felde findet eine doppelte Strömung von Elektrizität statt; negative elektrische Teilchen bewegen sich von der Kathode zur Anode, positive von der Anode zur Kathode. Auf Grund der Untersuchungen über Canalstrahlen identificiren wir die positiven Teilchen mit gewöhnlichen Ionen; von den negativen

nehmen wir an, dass sie *identisch* seien mit den Teilchen der Kathodenstrahlen, den Elektronen. Unter dieser Voraussetzung ist die Masse  $\mu$  der positiven Teilchen um vieles grösser als die der negativen; es liegt ausserdem die Annahme nahe, dass die Reibung bei den positiven Teilchen grösser sei, als bei den negativen. Wir betrachten zunächst die Bewegungen der beiden Arten von Ionen als voneinander unabhängig. In dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Teilchen ist dann die Wellenlänge des periodischen Gliedes viel kleiner bei den positiven, als bei den negativen Teilchen. Nehmen wir an, dass innerhalb des betrachteten Gebietes der nicht periodische Teil der Geschwindigkeit weder bei den positiven, noch bei den negativen Teilchen eine merkliche Aenderung erleide, so wird die Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen durch eine Wellenlinie dargestellt sein, deren Niveaulinie der  $x$ -Axe parallel ist. Die Geschwindigkeitscurve der positiven Teilchen dagegen ist eine der  $x$ -Axe parallele gerade Linie. Dasselbe gilt dann auch von den die Dichtigkeiten der negativen und der positiven Teilchen repräsentirenden Linien  $\eta_n$  und  $\eta_p$ .

Wir führen endlich noch die Annahme ein, dass die freie Elektrizität in dem betrachteten Abschnitt der Röhre im Ganzen gleich Null sei. Die gerade Linie, welche die Dichte  $\eta_p$  repräsentirt, fällt dann mit der Niveaulinie der Curve  $\eta_n$  zusammen. Daraus ergibt sich dann ein wellenförmiger Verlauf der freien Ladung, wie er in der nachstehenden Figur gezeichnet ist.



8. Wir haben im Vorhergehenden die Strömungen der positiven und der negativen Teilchen als voneinander unabhängig betrachtet. Es fragt sich, inwieweit dies gestattet ist. Wenn die Geschwindigkeit der positiven Teilchen constant ist, so verschwindet ihre elektrodynamische Wirkung auf die negativen; die Bewegung der letzteren kann also ebenso berechnet werden, wie früher.

Umgekehrt kann natürlich die elektrodynamische Wirkung

der negativen Teilchen auf die positiven nicht vernachlässigt werden. Nun kann man aber die Bewegung der negativen Teilchen als gegeben betrachten; die von ihnen ausgehende Wirkung hat den Charakter einer äusseren Kraft, unter deren Zwang die Bewegung der positiven Teilchen sich vollzieht. Diese äussere Kraft besitzt ein periodisches Glied, dessen Wellenlänge gleich sein muss der Wellenlänge der negativen Teilchen, gleich  $2/\beta$ . Ein periodisches Glied von derselben Art muss dann auch in der gezwungenen Bewegung der positiven Teilchen sich geltend machen. Aus der Analogie mit den entsprechenden Problemen der Akustik kann man schliessen, dass die Amplitude dieses Gliedes abnimmt mit der Masse der positiven Teilchen und mit dem Coefficienten  $\rho$  ihrer Reibung. Die Amplitude der Wellen dürfte klein sein, im Vergleich mit der Amplitude der Wellen, welche in der Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen auftreten. Die Einwirkung der negativen Teilchen auf die positiven würde hiernach die folgende Aenderung bedingen. An Stelle der geraden Linie  $\eta_p$ , durch welche in unserer Figur die Dichte der positiven Elektricität angegeben wird, tritt eine flache Wellenlinie; die Wellenlänge ist dieselbe, wie bei der Curve  $\eta_n$  der Dichte der negativen Elektricität; die Phase kann irgendwie verändert sein. Der wellenförmige Wechsel positiver und negativer Ladungen im Innern der Röhre wird dadurch nicht wesentlich verändert.

Durch die abwechselnden positiven und negativen Ladungen im Innern der Röhre wird aber die Voraussetzung, dass die Bewegungen sich in einem homogenen elektrischen Felde vollziehen, aufgehoben. Zu der constanten Feldintensität  $\mathfrak{F}$  wird noch ein periodisches Glied hinzukommen, dessen Wellenlänge abermals gleich  $2/\beta$  sein wird. Auch die Berücksichtigung eines solchen Gliedes wird an den wesentlichen Resultaten unserer Untersuchung nichts ändern.

9. Wir kommen nun zu einer Bemerkung, welche zeigt, dass unsere Theorie der Doppelströmung in einer Geissler'schen Röhre eine wesentliche Lücke enthält. Wenn in der Röhre positive und negative elektrische Teilchen in entgegengesetzten Richtungen sich bewegen, so werden dadurch *Zusammenstösse der verschiedenartigen Teilchen, Verbindungen derselben zu neutralen Moleculen* herbeigeführt werden.

Man kann das zunächst in Verbindung bringen mit dem *Leuchten der Schichten*; aus dem Anblick unserer Figur ergibt sich, dass an den Stellen  $h$  die innere elektrostatische Wirkung, welche der Schichtung entspricht, mit der Wirkung des Feldes gleichsinnig ist. An den Stellen  $d$  wirkt die innere Kraft der äusseren entgegen. Es ist daher wahrscheinlich, dass an den Stellen  $h$  mehr positive und negative Teilchen und mit grösserer Geschwindigkeit zusammenstossen als an den Stellen  $d$ . Nun entsprechen die Stellen  $h$  der Mitte der leuchtenden Schichten; das Leuchten müsste darnach durch die Verbindung entgegengesetzter Teilchen, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit zusammenstossen, hervorgebracht werden.

Wenn aber auf dem Wege der Strömung bewegte elektrische Teilchen verschwinden, indem sie sich zu neutralen Moleculen vereinigen, so müssen sie auch wieder ersetzt werden durch *Spaltung neutraler Moleculé*. Diese Vorgänge, welche in der Theorie von J. J. Thomson eine fundamentale Bedeutung besitzen, sind in der unserigen ganz vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung erscheint noch aus dem folgenden Grunde sehr wesentlich zu sein. Unsere Theorie führt zu einer stetig wachsenden Amplitude der negativen und der positiven Teile der Wellen. Es muss notwendig eine Wirkung existiren, welche das Anwachsen über eine gewisse Grenze hinaus verhindert; eine solche Gegenwirkung würde eben durch die Wiedervereinigung der entgegengesetzten elektrischen Teilchen zu neutralen Moleculen gegeben sein.

Man könnte hoffen, zu einer vollständigeren Theorie der Schichtenbildung zu gelangen, durch eine Verbindung der Thomson'schen Theorie, welche für sich genommen, keine Schichtung giebt, mit den in diesem Aufsätze niedergelegten Betrachtungen. Dem steht aber vorläufig entgegen, dass die Thomson'sche Theorie, wenigstens in ihrer weiteren Durchführung, gleiche Geschwindigkeiten der Ionen voraussetzt, während unsere Betrachtung notwendig auf verschiedene Geschwindigkeiten führt.

(Eingegangen 23. December 1900.)



13. *Ueber Ionisirung durchströmter Gase und die unipolare Entladung an glühenden Körpern<sup>1)</sup>; von J. Stark.*

1. *Selbstständige Strömung.* — Es können in einem Körper positive und negative frei bewegliche Ionen vorhanden sein; die freie Beweglichkeit eines Ions besteht darin, dass es von einer beliebig kleinen Kraft beliebig verschoben werden kann, ohne dass gleichzeitig mit ihm ein mit ihm fest verbundenes entgegengesetzt geladenes Ion sich verschiebt. Der Zustand eines Körpers, der durch das Vorhandensein freier Ionen dargestellt wird, sei im Folgenden mit *Ionisation* bezeichnet. Der Vorgang, in dem aus neutralen Teilchen freie positive und negative Ionen geschaffen werden, sei *Ionisirung* genannt.

Ein elektrischer Leitungsstrom in einem Körper hat das Vorhandensein freier Ionen oder Ionisation zur Voraussetzung. Ist die Ionisation unabhängig von einer elektromotorischen Kraft durch gewisse Wirkungen gegeben, so erzeugt eine beliebige kleine elektromotorische Kraft in dem Körper eine Verschiebung der Ionen oder einen elektrischen Strom. In diesem Falle sei die Strömung *unselbstständig* genannt.

Muss in einem Körper erst durch eine elektromotorische Kraft direkt oder indirekt Ionisation geschaffen und aufrecht erhalten werden und ist auf eine solche Ionisation eine elektrische Strömung gegründet, so heiße diese *selbstständig*.

Sowohl die selbstständige wie die unselbstständige elektrische Strömung bestehen in einer Gegenbewegung positiver und negativer Ionen (W. Weber). Auf folgenden Unterschied sei indes hier gleich im voraus hingewiesen. Die unselbstständige Strömung ist bei jeder beliebig kleinen elektromotorischen Kraft möglich; die selbstständige dagegen nur dann, wenn die elektromotorische Kraft oberhalb eines gewissen Grenzwertes liegt, dessen Grösse abhängt von den gegebenen Umständen.

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung in Physik. Zeitschr. 2. p. 17. 1900.



Beide Strömungsarten können gleichzeitig in demselben Körper vorhanden sein; das Eintreten der selbstständigen Strömung offenbart sich in einem starken Ansteigen der Stromstärke.

In Gasen ist eine unselbstständige Strömung möglich, wenn Ionisation durch nicht elektrische Wirkungen, nämlich durch Röntgen-<sup>1)</sup>, Becquerel-<sup>2)</sup>, ultraviolette Strahlung<sup>3)</sup> oder durch hohe Temperatur gegeben ist. Indem wir in ihnen eine starke elektromotorische Kraft wirken lassen, können wir in ihnen auch eine selbstständige Strömung hervorrufen. Diese soll uns hier speciell beschäftigen.

2. *Ursachen der Ionisirung in der selbstständigen Strömung.* —

In elektrisch neutralen Teilchen sind die positiven und negativen Ionen durch die Kraft der elektrischen Anziehung aneinander gebunden. Sollen sie frei werden, so müssen sie entgegen dieser Kraft soweit voneinander entfernt werden, dass sie ihre gegenseitige Anziehung nicht mehr zu hindern vermag, einem beliebigen Antrieb in irgend einer Richtung zu folgen. Dies kann einmal dadurch erreicht werden, dass man an den entgegengesetzt geladenen Ionen eines neutralen Teilchens eine (elektromotorische) Kraft wirken lässt, welche die Ionen in entgegengesetzter Richtung auseinandertreibt.

Als solche elektromotorische Kraft kommt in erster Linie die Kraft des elektrischen Feldes in Betracht. Diese bringt für sich allein und unmittelbar wirkend dann Ionisirung hervor, wenn sie grösser ist als die Kraft, mit welcher die Ionen in einem neutralen Teilchen sich anziehen. Nehmen wir an, dass in einem Körper lediglich durch diese direkte Wirkung der elektrischen Feldstärke Ionisation geschaffen wird, so ist verständlich, dass in einem Dielectricum die elektrische Kraft nicht über einen gewissen Grenzwert steigen kann, ohne Ionisation hervorzubringen und dann eben dadurch zu sinken.

Eine andere elektromotorische Kraft ist folgende. Besitzt ein neutrales Teilchen senkrecht zu magnetischen Kraftlinien eine relative translatorische oder rotatorische Geschwindigkeit,

1) W. C. Röntgen, Ber. d. Würzb. Soc. 1895; Wied. Ann. 64. p. 12. 1898.

2) F. H. Becquerel, Compt. Rend. 122. p. 559. 1896.

3) Ph. Lenard, Ann. d. Phys. 1. p. 486. 1900.

so tritt an seinen Ionen eine Kraft auf, welche proportional der magnetischen Feldstärke, der Ladung und der Geschwindigkeit ist. Aber diese Kraft nimmt erst bei sehr grossen Geschwindigkeiten (hohen Temperaturen) eine Grösse an, welche bezüglich einer ionisirenden Wirkung in Betracht zu kommen hätte.

Als weitere Ursache einer Ionisirung sei hypothetisch mit A. Schuster<sup>1)</sup> und J. J. Thomson<sup>2)</sup> der Stoss bewegter Teilchen eingeführt. Es sei also angenommen, dass ein neutrales Teilchen dadurch in Ionen zerlegt werden könne, dass es mit einem anderen elektrischen oder neutralen Teilchen mit grosser Geschwindigkeit zusammentrifft. Die Geschwindigkeit kann herrühren entweder von der gegebenen absoluten Temperatur oder bei einem freien Ion von der kinetischen Energie, welche es unter der Wirkung einer elektromotorischen Kraft<sup>3)</sup> annimmt. Bei den gewöhnlichen Temperaturen ist die Wirkung der thermischen kinetischen Energie wenigstens bei Gasen klein. Dagegen können die Geschwindigkeiten der elektrisch bewegten Ionen gross sein und eine starke ionisirende Wirkung hervorbringen. Doch wirkt dann gleichzeitig auch direct ionisierend die Feldstärke (locale elektromotorische Kraft) oder genauer sie hilft direct wirkend mit bei der Ionisirung; indem sie den Ionen Geschwindigkeiten erteilt, wirkt sie indirect ionisierend.

Die Einführung der ionisirenden Wirkung bewegter Ionen stützt sich auf die Thatsache, dass Kathoden- und Canalstrahlen<sup>4)</sup> ein von ihnen durchsetztes Gas leitend machen; und da man diese Strahlen als schnell bewegte negative und positive Teilchen (A. Schuster, W. Wien) anzusehen hat, so liegt der Schluss nahe, dass überhaupt bewegte elektrische Teilchen ionisierend wirken.

Das Maass der ionisirenden Wirkung der genannten Ursachen hängt für einen Körper von dessen gegebenem Zustand

1) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 37. p. 336. 1884.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 279. 1900.

3) Elektromotorische Kraft ist hier und im Folgenden als Kraft gedacht, welche entgegengesetzt geladene Ionen in entgegengesetzter Richtung treibt.

4) Th. Des Coudres, Wied. Ann. 62. p. 143. 1897; Ph. Lénard, Wied. Ann. 63. p. 253. 1897; W. Arnold, Wied. Ann. 61. p. 327. 1897; E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 62. p. 463. 1897.

ab. Für das folgende sei zunächst angenommen, dass die Grössen, welche den Zustand eines Körpers, speciell eines Gases, bestimmen, constant seien und dass lediglich die Feldstärke variiert werde.

Die elektrische Strömung in einem Gase kann auf ihrer Bahn ultraviolette oder Röntgenstrahlung erregen. Da indes solche Strahlungen nur durch den Stoss bewegter Teilchen ausgelöst werden, so sei ihre ionisirende Wirkung eingeschlossen gedacht in den Ausdruck Ionisirung durch den Stoss bewegter Teilchen. Ausgeschlossen ist im Folgenden dauernde Ionisirung durch secundäre Ursachen, die nicht in der Feldstärke ihren Ursprung haben.

3. *Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke, „elektromotorische Gegenkraft“ im Lichtbogen.* — Von verschiedenen Seiten<sup>1)</sup> ist bereits darauf hingewiesen worden, dass eine elektrische Strömung in einem Gas durch Strahlungen, die sie in ihm auslöst, das Gas auf ihrer Bahn leitend mache und so eine Erniedrigung des Spannungsgefälles herbeiführe. Für denjenigen, der in den Kathoden- und Canalstrahlen schnell bewegte Ionen sieht<sup>2)</sup>, ist es selbstverständlich, dass die ionisirende Wirkung der bewegten Ionen nicht bloss an der Kathode, sondern in allen Teilen der Strombahn sich zeigen müsse. Es sei wiederholt, dass wir A. Schuster (l. c.) die Ansicht verdanken, dass durch den Stoss bewegter elektrischer Teilchen neutrale Teilchen in leitfähige Partikeln oder Ionen zerlegt werden.

J. J. Thomson<sup>3)</sup> ist in einer jüngst veröffentlichten Arbeit soweit gegangen, die Ionisirung eines Gases ausschliesslich auf Rechnung der bewegten Ionen zu setzen, und hat die wichtige Meinung ausgesprochen, dass die Ionisirung nur dann erfolgen könne, wenn die Geschwindigkeit der Ionen und darum die elektrische Feldstärke oberhalb eines gewissen kritischen Wertes liege. Einen Grund für diese Vorbedingung hat er indes nicht angegeben.

Nun muss man wohl ebenfalls der Ansicht sein, dass in den Fällen der Entladung, die wir beobachten, die elektrische Feldstärke für sich allein nicht ausreiche, die Ionen eines neutralen

1) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 330. 1898.

2) W. Wien, Wied. Ann. 66. p. 446. 1889.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 279. 1900.

Teilchens entgegen ihrer wechselseitigen Anziehung zu trennen. Aber andererseits erscheint es doch zu weit gegangen, jede directe Mitwirkung der Feldstärke zu vernachlässigen. Man hat sich den Vorgang der Ionisirung wohl folgendermaassen vorzustellen.

Die Feldstärke richtet die Ionen eines neutralen Teilchens und sucht sie zu trennen. Wenn durch die Wirkung eines heranfliegenden Teilchens, insbesondere eines Ions, die Ionen eines neutralen Teilchens auseinandergetrieben werden, so hülft bei dieser Trennung die Kraft des Feldes mit und leistet entgegen der Ionenanziehung eine Arbeit, deren Wert eine Function ihrer Grösse und der Entfernung ist, in welcher die Ionen in Bezug aufeinander frei sind. Gleichzeitig leistet auch die kinetische Energie des stossenden Teilchens eine Arbeit, indem sie sich ganz oder teilweise in potentielle Energie verwandelt.

Die gesamte Arbeit, Ionisierungsarbeit, die zur Trennung der Ionen eines neutralen Teilchens entgegen ihrer wechselseitigen Anziehung geleistet werden muss, ist gleich der Differenz der potentiellen Energien, welche die Ionen in Bezug aufeinander im freien und im gebundenen Zustand unter den gegebenen Verhältnissen besitzen. Ionisirung eines neutralen Teilchens kann darum nur dann eintreten, wenn die Summe aus der kinetischen Energie eines stossenden Teilchens und der möglichen Ionisierungsarbeit der localen Feldstärke mindestens gleich ist der potentiellen Energie der freien Ionen in Bezug aufeinander (potentielle Energie der gebundenen Ionen als Nullpunkt der Messung genommen). Ist jene Summe kleiner als die potentielle Ionenenergie, so ist eine Ionisirung durch die Feldstärke nicht möglich. Statt jener Summe lässt sich die Feldstärke als Grenzwert der Ionisirung einführen. Nehmen wir nämlich an, dass die kinetische Energie eines Ions auf Grund der gegebenen Temperatur klein ist im Vergleich zu der kinetischen Energie, die es unter der Wirkung der Feldstärke annimmt, so wird sie durch die Grösse der Feldstärke bestimmt, die in der Nähe des zu ionisirenden Teilchens herrscht. Jene Summe erscheint darum als eine Function der Feldstärke, und man kann sagen: Die elektrische Feldstärke vermag unterhalb eines gewissen Grenzwertes keine Ionisirung hervorzubringen. Eine selbstständige Strömung in einem Gas ist aus diesem Grund

für eine bestimmte Stromstärke nur oberhalb eines gewissen Wertes der Spannungsdifferenz der Elektroden möglich.

Insofern die potentielle Ionenenergie eine Function der absoluten Temperatur  $T$  und einer für den betreffenden Körper charakteristischen Constante  $k$  ist, insofern die kinetische Energie, die ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke  $K$  annimmt, von einer Constante  $\alpha_p$  bez.  $\alpha_n$  und der mittleren Weglänge  $l_p$  bez.  $l_n$  des positiven bez. negativen Ions abhängt, lässt sich die Bedingung für das Eintreten der Ionisirung dahin definiren, dass eine Function  $F(K, T, k, \alpha, l)$  verschwinden muss. Aus  $F(K, T, k, \alpha_p, l_p) = 0$  bez.  $F(K, T, k, \alpha_n, l_n) = 0$  lassen sich für die verschiedenen Werte von  $T, k, \alpha$  und  $l$  die Ionisierungsgrenzwerte  $(K_0)_p$  bez.  $(K_0)_n$  für das bewegte positive bez. negative Ion berechnen.

Es ist schwierig, die Grenzspannung (Spannungsdifferenz der Elektroden beim Erlöschen der Strömung) einer selbstständigen Strömung in Gasen durch eine Function darzustellen, da sie auch von den Dimensionen der Entladebahn abhängt. Aber soviel lässt sich auf Grund des Vorstehenden sagen, dass für jede selbstständige Strömung in einem Gas bei gegebenen Umständen, vor allem für eine bestimmte Stromstärke ein Wert der Spannungsdifferenz der Elektroden besteht, unterhalb dessen die Strömung nicht möglich ist.

Die elektrische Strömung in einem Dampf haben wir in eine Reihe zu stellen mit der Strömung in einem Gas. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint die sogenannte elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens als die zur Aufrechterhaltung der Ionisirung notwendige Grenzspannung einer selbstständigen Strömung.

4. *Entladungsverzug.* — Die vorstehenden Ueberlegungen haben stillschweigend die nach neueren Versuchen<sup>1)</sup> zutreffende Voraussetzung, dass schon vor dem Eintreten der Wirkung der Feldstärke einige freie Ionen aus irgend welchen Gründen vorhanden sind; diese werden dann von der Feldstärke in Bewegung gesetzt und bringen mit dieser zusammen durch ihren Stoss Ionisirung hervor.<sup>2)</sup> Sind keine freien Ionen vorhanden,

1) W. Linss, Elektrotechn. Zeitschr. 11. p. 506. 1898; J. Elster und H. Geitel, Ann. d. Phys. 2. p. 425. 1900.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 279. 1900.

so muss die Feldstärke so weit anwachsen, bis sie schliesslich gleich der Anziehungskraft der Ionen im neutralen Teilchen geworden ist. Dann aber sinkt sie beim Eintritt der Ionisierung und Entladung wieder und kann ohne Erlöschen der Ionisation soweit erniedrigt werden, bis der aus den Gleichungen  $F = 0$  sich ergebende Grenzwert erreicht ist.

Je mehr secundär erzeugte Ionen die Feldstärke vorfindet, desto schneller kann sie die Ionisierung herbeiführen. Findet sie nur wenige vor, so kann sie den Ionisierungsgrenzwert beträchtlich übersteigen, ohne dass Ionisierung und damit Entladung eintritt. Darin liegt die Erscheinung des Entladungsverzuges begründet. Liegt ein solcher vor, so kann die Entladung, wie bekannt ist, erleichtert oder ausgelöst werden, indem vorübergehend eine höhere elektrische Spannung, eine zweite Entladung, höhere Temperatur, oder eine ionisierende Strahlung (Röntgen-, Becquerelstrahlen, ultraviolettes Licht) zur Wirkung auf die Entladebahn gebracht wird.

Ferner ist folgendes klar. Mit Rücksicht auf den Entladungsverzug thut man nicht gut, Grenzwerte der Feldstärke für Ionisierung oder Grenzwerte der Spannung selbstständiger Strömungen von bestimmter Stärke bei allmählicher Erhöhung der Spannung zu bestimmen; sondern man hat die Entladung erst einzuleiten und dann die Spannung unter Constanthaltung der Stromstärke langsam zu erniedrigen, bis die Entladung oder Strömung erlischt. Der Wert der Spannung im Moment des Erlöschens ist der gesuchte Grenzwert.

5. *Stationäre Ionisierung und stationäre Strömung.* — Es ist selbstverständlich, dass die directe und indirecte Ionisierung durch die Feldstärke nicht bloss zur Einleitung einer Entladung, sondern auch innerhalb und während einer selbstständigen Strömung wirksam sein muss, damit diese überhaupt bestehen kann.

Die Ionisation kann bei gegebener elektromotorischer Kraft nicht unbegrenzt zunehmen; es werden nämlich Ionen aus neutralen Teilchen nicht bloss neu gebildet, sondern es verschwinden auch beständig Ionen, indem sie sich wieder zu elektrisch neutralen Teilchen vereinigen. Stationäre Ionisation ist dann vorhanden, wenn in der Zeiteinheit ebensoviele freie Ionen in der Volumeneinheit neu auftreten als verschwinden.

Bezeichnen wir den Vorgang der Wiedervereinigung mit



Molisierung und nehmen zunächst an, dass die Zahl der freien Ionen in der Volumeneinheit lediglich durch Ionisierung und Molisierung geändert werde; auch soll nur eine Art positiver und negativer Ionen auftreten, wie ja bereits im Vorausgehenden stillschweigend angenommen wurde.

Die Zahl der freien Ionen, welche durch Ionisierung neu entstehen, ist eine Function der Anzahl  $n_p$  bez.  $n_n$  der vorhandenen freien positiven bez. negativen Ionen, der Feldstärke  $K$ , der absoluten Temperatur  $T$ , einer für den Körper charakteristischen Constante  $k$ , der freien Weglängen  $l_p$  bez.  $l_n$ , zweier für die zwei Ionenarten charakteristischen Constante  $\alpha_p$  bez.  $\alpha_n$  und endlich der Zeit  $t$ . Die Zahl der durch Ionisierung in der Volumeneinheit neu entstehenden Ionen lässt sich also darstellen als eine Function  $f = f_p(K, T, k, \alpha_p, l_p, t) + f_n(K, T, k, \alpha_n, l_n, t)$ . Hierzu ist die Bedingung zu nehmen  $f_p = 0$  für  $K < (K_0)_p$  und  $f_n = 0$  für  $K < (K_0)_n$ ;  $(K_0)_p$  und  $(K_0)_n$  sind die aus den Gleichungen  $F = 0$  sich ergebenden Grenzwerte. Die Zahl der durch Molisierung verschwindenden Ionen lässt sich geben durch eine Function  $\varphi(K, T, k, \alpha_p, \alpha_n, l_p, l_n, t)$ .

Im stationären Zustand der Ionisation muss gelten

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung ist z. B. auf eine längere ungeschichtete positive Lichtsäule anzuwenden.

In einem stationär durchströmten und darum stationär ionisirten Gas wird nun die Zahl der Ionen ausser durch Ionisierung und Molisierung im allgemeinen auch noch durch die Diffusion und die elektrische Konzentrationsänderung<sup>1)</sup> beeinflusst. Die Zahl der durch Diffusion bez. die elektrische Konzentrationsänderung verschwindenden und neu auftretenden Ionen sei durch die Function  $\chi$  bez.  $\psi$  dargestellt. Die Bedingungsgleichung für stationäre Ionisation ist dann im allgemeinen Fall

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Es ist die Frage aufgeworfen worden, ob eine stationäre elektrische Strömung in Gasen möglich sei, und von der einen

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 2. p. 4 u. 133. 1900; Ann. d. Phys. 3. p. 510. 1900.



Seite ebenso entschieden verneint, als von der anderen bejaht worden. Hierzu ist folgendes zu bemerken.

Eine stationäre unselbstständige Strömung in einem Gase ist möglich und dann vorhanden, wenn die durch secundäre Hilfsmittel herbeigeführte Ionisation und die elektromotorische Kraft des Stromkreises zeitlich constant sind.

Eine stationäre selbstständige Strömung in einem Gase ist ebenfalls möglich; sie tritt dann ein, wenn die obigen Gleichungen für stationäre Ionisation erfüllt, die elektromotorischen Kräfte und die gegebenen Verhältnisse zeitlich constant sind. Jene Gleichungen lassen sich aber erfüllen, wenn die Feldstärke genügend hoch gewählt wird.

6. *Unipolare Ionisirung.* — Sehen wir eine Ursache der Ionisirung in dem Stoss bewegter Teilchen, so müssen wir die Fähigkeit zu ionisiren sowohl bewegten positiven wie negativen Ionen zuschreiben. Dieser Forderung ist bereits Rechnung getragen worden durch Aufstellung zweier Gleichungen  $F=0$ . Hier soll nun der Unterschied zwischen den positiven und negativen Ionen hinsichtlich ihrer ionisirenden Wirkung näher besprochen werden.

Es ist möglich, dass die kinetische Energie der negativen Ionen in verdünnten Gasen unter gleichen gegebenen Umständen und gleicher elektromotorischer Kraft im Mittel grösser werden kann als diejenige der positiven. Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn die mittlere freie Weglänge des negativen Ions unter gleichen Umständen grösser ist als die des positiven; die mittlere kinetische Energie unter der Wirkung der Feldstärke  $K$  des positiven bez. negativen Ions ist nämlich  $K \cdot l_p$  bez.  $K \cdot l_n$ . Ein Unterschied der mittleren freien Weglängen ist jedenfalls theoretisch wahrscheinlich, wahrscheinlicher als, dass die freien Weglängen gleich sind. Doch darüber hat die Erfahrung zu entscheiden.

Wir nehmen an, dass die Gleichungen für den Eintritt der Ionisirung  $F(K, T, k, x_p, l_p) = 0$  und  $F(K, T, k, x_n, l_n) = 0$  nicht identisch seien, dass vielmehr  $l_n > l_p$  sei. Die Folge davon ist, dass der Ionisierungsgrenzwert  $(K_0)_n$  der Feldstärke für das negative Ion kleiner ist als derjenige  $(K_0)_p$  für das positive. Es ist also dann  $(K_0)_p > (K_0)_n$ .

Bezeichnet  $K$  die wirklich vorhandene elektromotorische

Kraft und ist  $(K_0)_n < K < (K_0)_p$ , so erfolgt an der betrachteten Stelle Ionisirung nur durch die negativen Ionen.

Ist  $K > (K_0)_p > (K_0)_n$ , so bewirken die positiven wie negativen Ionen Ionisirung, aber diese in grösserem Maasse als jene.

Hat zwischen zwei Elektroden in einem verdünnten Gas eine selbstständige Strömung statt und ist  $(K_0)_p$  bedeutend grösser als  $(K_0)_n$ , so wird die Form der Strömung abhängig von der Bewegung der negativen Ionen. Da diese von der Kathode herkommen, so werden die einzelnen Abschnitte (Schichten) der Strömung in ihrer Lage bestimmt durch diejenige der Kathode; sie müssen mit dieser fest verbunden<sup>1)</sup>, aus ihr hervorzuströmen erscheinen. Auch hängt dann die Stärke des elektrischen Stromes in erster Linie von den Verhältnissen an und in der Nähe der Kathode ab.<sup>2)</sup>

Eine andere Folge der unipolaren Ionisirung, die unipolare Entladung, wird weiter unten besprochen werden.

7. *Gangunterschied zwischen Ionisirung und Feldstärke.* — In den vorausgehenden Abschnitten wurde stillschweigend immer angenommen, dass das Maass der kinetischen Energie und damit der Ionisirung abhängt von der Feldstärke an dem Orte der Ionisirung. Dies ist nicht allgemein richtig. Gemäss der an anderen Stellen entwickelten Anschauungen über die Eigenart der elektrischen Strömung in Gasen<sup>3)</sup> ist nämlich die kinetische Energie der Ionen in Gasen im allgemeinen nicht mehr proportional der an Ort und Stelle herrschenden Kraft.

Indem ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke wachsende kinetische Energie annimmt, legt es eine Strecke Weges zurück; sinkt längs desselben die Feldstärke, ohne dass es Energie durch Zusammenstoss einbüsst, so besitzt es an dem Ort mit kleinerer Feldstärke grössere kinetische Energie als an den vorausgehenden Orten mit grösserer Feldstärke. Dort kann es darum trotz der kleineren Feldstärke eine grössere ionisirende Wirkung haben als hier. Allgemein kann man sagen: Der Ort der ionisirenden Wirkung eines Ions ist gegen den Ort, wo ihm die Feldstärke kinetische Energie erteilt hat, ver-

1) E. Goldstein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1876. p. 292.

2) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 1. p. 435. 1900.

3) J. Stark, Physikal. Zeitschr. 1. p. 441. 1900; 2. p. 132. 1900.

schoben und zwar in der Bewegungsrichtung des Ions. Die mittlere Grösse des Gangunterschiedes zwischen der Ionisirung und der Feldstärke hängt ab von der mittleren freien Weglänge des Ions.

Da wo die Feldstärke räumlich constant ist, wie in der ungeschichteten positiven Lichtsäule, offenbart sich die Verschiebung zwischen Kraft und Ionisirung nicht; hier kann darum die mittlere kinetische Energie der Ionen und darum ihre ionisirende Wirkung durch die örtliche Feldstärke dargestellt werden. Wo dagegen die Kraft räumlich variirt, ist dies nicht mehr möglich. Die relativen Maxima der Ionisirung sind gegen die relativen Kraftmaxima in der Bewegungsrichtung der Ionen verschoben. So rührt beispielsweise die Ionisation in der negativen Glimmschicht zum grösseren Teil von den negativen Ionen her, welche unmittelbar an der Kathode eine grosse kinetische Energie angenommen haben.

Der Gangunterschied zwischen Ionisirung und Feldstärke spielt bei der Schichtung eine wichtige Rolle. Wie die elektrische Konzentrationsänderung bewirkt er nämlich, dass an den Stellen der Kraftminima, den leuchtenden Schichten, die Ionisation auf einem gewissen Wert bleibt. Er ist also einer der Factoren, welche die eigentümliche Verteilung der Ionisation in einer geschichteten Entladung aufrecht erhalten und diese selbst bedingen.

8. *Einfluss der Temperatur auf die Ionisirung.*<sup>1)</sup> — In den Gleichungen, welche den Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke liefern, ist die absolute Temperatur enthalten. Deren Einfluss auf jenen Grenzwert kann erst dann exact und quantitativ festgestellt werden, wenn jene Gleichungen bekannt sind. Doch kann auch ohne deren Kenntnis wenigstens die Richtung jenes Einflusses angegeben werden.

Es ist möglich, ja wahrscheinlich, dass mit steigender Temperatur die potentielle Energie der gebundenen Ionen eines neutralen Teilchens zunimmt. Die Differenz der potentiellen Energien der freien und gebundenen Ionen ist dann kleiner und darum ebenfalls die Ionisierungsarbeit. Dies würde be-

1) Dieser und der folgende Abschnitt sollen eine Ergänzung einer früheren Abhandlung (Wied. Ann. 68. p. 919. 1899) sein, insbesondere eine dort gemachte Andeutung (p. 930) näher ausführen.

reits eine Erniedrigung der Grenzfeldstärke mit steigender Temperatur zur Folge haben. Aber da hierüber nichts genaueres bekannt ist, so sei nicht weiter davon gesprochen.

Eine andere Ueberlegung sei hingegen angestellt. Es wurde oben angenommen, dass durch den Stoss bewegter Teilchen Ionisirung auf Kosten der kinetischen Energie der Teilchen erfolge. Es wurde bis jetzt angenommen, dass die stossenden Teilchen elektrisch oder Ionen seien und dass sie ihre kinetische Energie wesentlich der Wirkung der Feldstärke verdanken. Wenn aber die kinetische Energie des stossenden Teilchens überhaupt das Ausschlaggebende ist, so müssen wir einerseits auch bewegten neutralen Teilchen die Fähigkeit zu ionisiren zusprechen und andererseits von der Abkunft der kinetischen Energie des stossenden Teilchens absehen. Diese Verallgemeinerung verlangt eine Modification der oben angedeuteten Gleichungen. Es seien indes hier nur die leitenden Gesichtspunkte angegeben.

Ist die Feldstärke Null, so kann durch blosse Erhöhung der Temperatur Ionisirung bewirkt werden<sup>1)</sup>; dies tritt offenbar dann ein, wenn die kinetische Energie eines stossenden Teilchens grösser ist als die potentielle Ionenenergie bei der erhöhten Temperatur.

Ist die Feldstärke nicht Null, so ist die kinetische Energie der zufällig vorhandenen freien Ionen eine Summe aus zwei Theilen, einer Grösse, welche proportional ist der gegebenen absoluten Temperatur des Körpers, und der mittleren kinetischen Energie, welche das Ion der Wirkung der Feldstärke verdankt. Die mittlere kinetische Gesamtenergie eines Ions ist darum grösser als die eines neutralen Teilchens und darum wird Ionisirung durch die Feldstärke immer früher eintreten als die rein thermische Ionisirung. Und was den Einfluss der Temperatur auf den Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke betrifft, so ist folgendes verständlich. Bei constanter Feldstärke bedeutet Erhöhung der Temperatur Vergrösserung der kinetischen Energie der freien Ionen. Die kinetische Gesamtenergie eines Ions hat zum Ende der Ionisirung oberhalb eines gewissen Wertes zu liegen; nimmt darum der eine Summand, der thermo-

1) Vgl. Literatur, J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 942. 1899.

kinetische Teil, zu, so kann der andere, der elektrokinetische Teil, und damit der Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke abnehmen. Wir können darum sagen, dass mit steigender Temperatur eines Körpers der Grenzwert der Feldstärke, bei welchem Ionisierung und damit Entladung eintritt (Entladespannung), kleiner und schliesslich Null wird. Dies bestätigt der Versuch.<sup>1)</sup>

9. *Unipolare Entladung an glühenden Körpern.* — Glühende Körper elektrisieren sich in einem Gas je nach Umständen positiv oder negativ, während im Gase Ionen von entgegengesetzter Ladung auftreten. Diese Elektrisierung bewirkt, dass ein dem glühenden Körper genäherter Leiter oder der glühende Körper selbst eine elektrische Ladung allmählich verliert; dabei treten je nach dem Vorzeichen der Elektrisierung gewisse Unipolaritäten<sup>2)</sup> auf. Nicht diese Erscheinung sei hier unter unipolarer Entladung verstanden, sondern folgende.

Wird auf einem von Gas umgebenen Leiter die Spannung (absolut genommen) erhöht, so tritt schliesslich Ionisierung durch die Feldstärke ein und damit eine selbstständige (disruptive) Entladung durch das Gas.

Die Erfahrung zeigt nun, dass der Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke oder die Entladespannung an einem glühenden Körper kleiner ist als an einem kalten, dass sie mit steigender Temperatur allmählich bis auf sehr kleine Werte sinkt. Dies steht im Einklange mit dem, was oben über den Einfluss der Temperatur auf den Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke gesagt wurde.

Auffallend bleibt indes die Thatsache, dass an glühenden Körpern die Entladespannung für die negative Elektrizität beträchtlich kleiner ist als für die positive. Sie scheint sich indes auf Grund der obigen Ausführungen über unipolare Ionisierung ungezwungen in folgender Weise erklären zu lassen.

An der Oberfläche eines glühenden Körpers werden im Gase durch die Wirkung der hohen Temperatur und bei Hellglut auch durch die ultraviolette Strahlung secundär unabhängig von der Feldstärke freie Ionen geschaffen. Ein glühender

1) A. Overbeck, Wied. Ann. **60**. p. 193. 1897; J. Stark, Wied. Ann. **68**. p. 922. 1899.

2) Vgl. Literatur, J. Stark, Wied. Ann. **68**. p. 919. 1899.

Körper ist also von einer dünnen unmittelbar an ihm liegenden Atmosphäre ionisirten Gases umgeben. Die freien positiven und negativen Ionen in dieser werden bei vorhandener Ladung des Körpers durch die Feldstärke in entgegengesetzter Richtung in Bewegung gesetzt und wirken dann ionisierend auf neutrale Gasteilchen, sowie die Feldstärke den Ionisierungsgrenzwert erreicht hat. Zu beachten ist jedoch dabei, dass diese ionisierende Wirkung hauptsächlich nur diejenigen Ionen hervorbringen können, welche sich von dem glühenden Körper weg in das Gas hineinbewegen. Da nämlich die ionisirte Gasschicht dünn ist, so kommen die auf den Körper zuwandernden Ionen an diesem bald zum Stillstand; es kann darum nur eine kleine Zahl von ihnen im Gas vorhanden sein. Demgemäss gelangen in der Umgebung eines glühenden Körpers vorzugsweise nur Ionen eines Zeichens zur ionisierenden Wirkung, nämlich diejenigen, welche gleiches Zeichen mit der Ladung des Körpers haben und darum von diesem weg in das Gas wandern.

Da nun die negativen Ionen in Gasen nach den obigen Darlegungen stärker ionisierend wirken als die positiven, so ist gemäss den Auseinandersetzungen über unipolare Ionisierung verständlich, dass der Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke oder der absolute Wert der Entladespannung für eine negative Ladung eines glühenden Körpers kleiner ist als für eine positive.

Göttingen, 5. December 1900.

(Eingegangen 14. December 1900.)

---



**14. Ueber das thermoelektrische  
Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide;  
von Edmund van Aubel.**

Hr. Anton Abt hat kürzlich eine Arbeit über die thermoelektromotorische Kraft einiger Oxyde und Metallsulfide veröffentlicht.<sup>1)</sup> Dieser Physiker hat genannte Kraft nach der von Kirchhoff modificirten Poggendorff'schen Compensationsmethode studirt.

Wenn  $e$  und  $e'$  die elektromotorischen Kräfte zweier zu vergleichender Thermoelemente sind, so bekommt man

$$\frac{e}{e'} = \frac{a}{a'},$$

wobei  $a$  und  $a'$  die entsprechenden Längen eines gespannten Platindrahtes sind, für welche die Compensation erreicht wird.

Demnach ergeben sich für die Länge  $a$ , welche zur thermoelektrischen Kraft des zu beobachtenden Thermoelementes verhältnismässig ist, folgende Werte, welche wir verwenden müssen:

Thermoelemente		Wert des $a$	Thermoelemente		Wert des $a$
Wismut und Zink		134,6	Chalkopyrit und Wismut		542,2
" " Antimon		199,7	" " Zink		602,6
Pyrolusit " Wismut		210,6	" " Nickel		618,8
" " Nickel		285,1	" " Eisen		667,1
" " Kohle		315,2	" " Antimon		669,3
" " Zink		331,1	Pyrit und Pyrrhotit		563,2
" " Eisen		353,9	" " Antimon		576,3
" " Pyrrhotit		370,1	" " Zink		600,5
" " Antimon		396,9	" " Kohle		615,6
Pyrrhotit " Eisen		11,0	" " Eisen		635,9
" " Antimon		21,7	" " Nickel		642,9
" " Zink		29,7	" " Wismut		731,9
" " Nickel		59,8	" " Pyrolusit		933,2
" " Wismut		178,0			
" " Chalkopyrit		649,5			

1) A. Abt, Ann. d. Phys. 2. p. 266. 1900.



Der Verfasser der Arbeit, von welcher wir sprechen, hat aus den verschiedenen Werten für  $a$  folgende Schlussfolgerungen (l. c. p. 278) gezogen:

„Vergleicht man die mitgetheilten Resultate miteinander, so erhält man für die von mir untersuchten Metallsulfide und Metalloxyde folgende Spannungsreihe:

Chalkopyrit	Kupfer	Eisen
Pyrolusit	Cadmium	Pyrrhotit
Wismut	Nickelerz	Antimon
Zink	Kohle	Pyrit
Nickel	(für Bogenlicht)	+

Die Glieder dieser Reihe folgen dem Gesetze der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle mit hinreichender Annäherung.“ So ist z. B.

$$\text{Pyrolusit/Kohle} + \text{Kohle/Pyrit} = \text{Pyrolusit/Pyrit}$$

$$315,2 \quad + \quad 615,6 \quad = \quad 930,8 \text{ (beob. 933,2),}$$

ferner

$$\text{Wismut/Zink} + \text{Zink/Pyrit} = \text{Wismut/Pyrit}$$

$$134,6 \quad + \quad 600,5 \quad = \quad 735,1 \text{ (beob. 731,9).}$$

Mein Zweck war, diese letztere Folgerung von A. Abt mit Hilfe anderer aus den Ergebnissen dieser Messungen herausgegriffener Beispiele zu prüfen.

Stellen wir zunächst fest, dass der genannte Physiker findet:

$$\text{für Pyrit/Zink} \quad a = 600,5$$

$$\text{„ Pyrit/Eisen} \quad a = 635,9$$

Das Eisen müsste also in der thermoelektrischen Spannungsreihe vom Pyrit weiter entfernt sein als das Zink. Aber man hat andererseits:

$$\text{für Chalkopyrit/Eisen} \quad a = 667,1$$

$$\text{„ Chalkopyrit/Zink} \quad a = 602,6$$

$$\text{„ Pyrrhotit/Zink} \quad a = 29,7$$

$$\text{„ Pyrrhotit/Eisen} \quad a = 11,0$$

$$\text{„ Pyrolusit/Eisen} \quad a = 353,9$$

$$\text{„ Pyrolusit/Zink} \quad a = 333,1$$

Die Ergebnisse der drei letzten Reihen zeigen dagegen, dass Zink und Eisen in der thermoelektrischen Spannungs-

reihe die Stellen einnehmen, welche ihnen A. Abt eingeräumt hat. Analoge Fälle bieten sich weiter. So ergeben die für die Thermoelemente Pyrrhotit/Nickel und Pyrrhotit/Zink einerseits, Pyrit/Eisen und Pyrit/Zink andererseits erhaltenen Werte für Nickel, Zink und Eisen *andere Plätze in der thermoelektrischen Spannungsreihe* als die, welche ihnen angewiesen sind.

Berechnen wir nunmehr die Werte der elektromotorischen Kraft der Thermoelementen Nickel/Eisen, Zink/Eisen, Wismut/Antimon und Wismut/Pyrrhotit durch Aufstellung der Summe oder der Differenz der elektromotorischen Kräfte geeignet zusammengestellter Verbindungen, so erhalten wir für die verschiedenen Werte der Länge  $a$  folgende Ergebnisse:

Thermoelement Nickel/Eisen.

1. Pyrit/Nickel	—	Pyrit/Eisen	=	Nickel/Eisen
642,9	—	635,9	=	7,0
2. Chalkopyrit/Eisen	—	Chalkopyrit/Nickel	=	Nickel/Eisen
667,1	—	618,8	=	48,3
3. Pyrrhotit/Nickel	—	Pyrrhotit/Eisen	=	Nickel/Eisen
59,8	—	11,0	=	48,8
4. Pyrolusit/Eisen	—	Pyrolusit/Nickel	=	Nickel/Eisen
353,9	—	285,1	=	68,8

Die Länge  $a$  ist also, bez. je nach dem Falle,  
7,0 48,3 48,8 68,8.

Thermoelement Zink/Eisen.

1. Chalkopyrit/Eisen	—	Chalkopyrit/Zink	=	Zink/Eisen
667,1	—	602,6	=	64,5
2. Pyrrhotit/Zink	—	Pyrrhotit/Eisen	=	Zink/Eisen
29,7	—	11,0	=	18,7
3. Pyrolusit/Eisen	—	Pyrolusit/Zink	=	Zink/Eisen
353,9	—	331,1	=	22,8

Die Länge  $a$  wechselt also zwischen 18,7 22,8 und 64,5.

Thermoelement Wismut/Antimon.

1. Chalkopyrit/Antimon	—	Chalkopyrit/Wismut	=	Wismut/Antimon
669,3	—	542,2	=	127,1
2. Pyrit/Wismut	—	Pyrit/Antimon	=	Wismut/Antimon
731,9	—	576,3	=	155,6
3. Pyrrhotit/Wismut	+	Pyrrhotit/Antimon	=	Wismut/Antimon
178,0	+	21,7	=	199,7
4. Pyrolusit/Antimon	—	Pyrolusit/Wismut	=	Wismut/Antimon
396,9	—	210,6	=	186,3

Die Länge  $a$  ist also je nachdem 127,1 155,6 186,3 199,7. Die directe Prüfung der Thermoelemente Wismut/Antimon hat, nach A. Abt, ergeben:  $a = 199,7$ .

## Thermoelement Pyrrhotit/Wismut.

1. Pyrit/Wismut	—	Pyrit/Pyrrhotit	=	Pyrrhotit/Wismut
781,9	—	563,2	=	168,7
2. Chalkopyrit/Pyrrhotit	—	Chalkopyrit/Wismut	=	Pyrrhotit/Wismut
649,5	—	542,2	=	107,6
3. Pyrolusit/Pyrrhotit	—	Pyrolusit/Wismut	=	Pyrrhotit/Wismut
370,1	—	210,6	=	159,5

Die Länge  $a$  ist hier 107,3 159,5 oder 168,7; die directe Messung hatte  $a = 178,0$  ergeben.

Diese Beispiele beweisen, dass die Schlussfolgerung der Arbeit von A. Abt sich keineswegs bestätigt, sowie um klarzustellen, dass die von ihm geprüften Körper nicht dem Gesetze unterworfen sind, welchem die thermoelektrische Spannungsreihe der Metalle gehorcht.

(Eingegangen 27. November 1900.)

Substanzen und chemische Formeln	Molekulargewicht relatives	Atomgewicht relatives	Molekulargewicht relatives	Atomgewicht relatives
Bromwasser $\text{H}_2\text{O}$	18,02	9,01	18,02	9,01
Essigsäure $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	60,05	30,03	60,05	30,03
Phosphorsäure $\text{H}_3\text{PO}_4$	98,00	49,00	98,00	49,00
Phosphorsäure $\text{H}_3\text{PO}_3$	82,00	41,00	82,00	41,00

**15. Ueber die Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz Neumann-Joule-Kopp; von Edmund van Aubel.**

Stefan Meyer<sup>1)</sup> hat eine Arbeit über das Gesetz Neumann-Joule-Kopp, betreffend die Additivität der Atomwärmen, veröffentlicht, deren Schlussfolgerung er in folgendes Gesetz zusammenfasst:

*Die Molecularwärme eines zusammengesetzten Körpers ist gleich der Summe der Atomwärmen seiner Bestandteile, wenn das Molecularvolumen gleich der Summe der Atomvolumina ist. Im Falle einer starken Volumencontraction ist die Molecularwärme niedriger als die Summe der Atomwärmen, während eine beträchtliche Volumendilatation einer Molecularwärme entspricht, welche grösser ist als die Summe der Atomwärmen.*

Ich halte es für nützlich, in nachfolgender Tabelle, einige Ergänzungen dieses Gesetzes aufzustellen, wobei bemerkt sei, dass die Columnen 2 und 3 nach den Ergebnissen von G. A. Hagemann<sup>2)</sup> angeführt werden. Die Molecularwärmen sind der Arbeit Regnault's<sup>3)</sup> entnommen. Die letzte Columnne erlangte ich unter Zuhülfenahme der von W. Ostwald<sup>4)</sup> gegebenen Atomwärmen.

Substanzen und chemische Formeln	Molecularvolumen	Summe der Atomvolumina	Molecularwärmen	Summe der Atomwärmen
Bromsilber AgBr	29,6 <	35,6	18,88 >	12,78
Jodkalium KJ	53,9 <	70,5	13,60 >	13,83
Quecksilberjodür Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>	84,8 >	80,4	25,85 <	26,48
Quecksilberjodid HgJ <sub>2</sub>	74,2 >	65,7	19,06 <	20,10

1) St. Meyer, Ann. d. Phys. 2. p. 135. 1900.

2) G. A. Hagemann, Ueber Volumänderungen bei chemischen Processen der festen und flüssigen Elemente, p. 7. Friedländer, Berlin 1900.

3) V. Regnault, Ann. de chim. et de phys. (3) 1. p. 177 u. 178. 1841.

4) Vgl. W. Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chem. 1. p. 983—984. 1891.

Bromsilber und Jodkalium zeigen also eine Contraction des Volumens und ihre Molecularwärmen sind grössere als die Summe der Atomwärmen.

Die Jodquecksilberverbindungen  $Hg_2J_2$  und  $HgJ_2$ , dagegen zeigen eine Dilatation des Volumens, aber ihre Molecularwärmen sind geringere als die Summe der entsprechenden Atomwärmen. Uebrigens sind die beobachteten Differenzen zu bedeutend, als dass man dieselben Irrthümern bei den Versuchen zuschreiben müsste.

Andererseits kann die specifische Wärme der Legirungen meist mit Hülfe der sogenannten Mischungsregel bestimmt werden, wie Regnault bewiesen hat, oder, was auf dasselbe herauskommt, durch das Gesetz Neumann-Joule-Kopp. Ausnahme davon machen die Eisen-Antimonlegirungen, wie J. Laborde dargelegt hat.<sup>1)</sup> Uebrigens bilden sich diese Legirungen unter beträchtlicher Volumenverminderung<sup>2)</sup> und doch sind die beobachteten specifischen Wärmen höher als die durch Berechnung erhaltenen.

1) Vgl. E. van Aubel, Physik. Zeitschr. 1. p. 452. 1900.

2) J. Laborde, Journal de physique (3) 5. p. 547. 1898.

(Eingegangen 27. November 1900.)

**16. Zur Theorie der Strahlung;  
Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck;  
von W. Wien.**

Hr. Planck<sup>1)</sup> hat zwei von mir über die Strahlung schwarzer Körper hingestellte Sätze einer Kritik unterzogen. Einer dieser Sätze bezog sich auf die Umkehrbarkeit der Strahlung bei freier Ausbreitung und behauptete die Nichtumkehrbarkeit, wenn keine gleichzeitige Arbeitsleistung erfolgt, während Hr. Planck diesen Vorgang für umkehrbar hält. Bei einer mündlichen Besprechung hat sich feststellen lassen, dass diese Meinungsverschiedenheit im wesentlichen fortfällt, wenn eine präzise Definition eines nichtumkehrbaren Processes gegeben wird. Die Meinungsverschiedenheit war in ihren wesentlichen Punkten dadurch hervorgerufen, dass wir nicht dasselbe unter einem nichtumkehrbaren Prozesse verstanden.

Wenn wir ein strahlendes Flächenelement in den Mittelpunkt einer spiegelnden Hohlkugel legen, sodass alle Strahlen wieder zurückreflectirt werden und wir lassen die Strahlung unter Ausschluss weiterer Emission sich in einen grösseren Raum hinein ausbreiten und von einer Kugel mit grösserem Radius reflectiren, so ist dieser Vorgang sicher umkehrbar, wenn das Element so klein ist, dass alle Strahlen als radial betrachtet werden können. Wenn dagegen die Ausdehnung des Elementes nicht ganz vernachlässigt wird, sodass Strahlen unter verschiedenem Winkel auf die Hohlkugel fallen, so werden die verschieden gerichteten Strahlenbündel verschieden lange Wege bis zur zweiten Kugel zurückzulegen haben und infolge dessen nicht alle gleichzeitig in die erste Kugel wieder zurückkehren. Betrachten wir zwei Strahlenbündel, die auf

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 3. p. 764. 1900.



verschieden langen Wegen in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, so werden sie diese jemals gleichzeitig nur dann erreichen, wenn das Verhältnis der Weglängen durch eine rationale Zahl ausgedrückt wird. Bei einer ausgedehnten Strahlungsquelle wird sich daher der ursprüngliche Zustand niemals genau wieder herstellen. Es lässt sich aber auch dieser Vorgang als umkehrbar ansehen, indem nach endlicher Zeit sich von selbst der ursprüngliche Zustand angenähert herstellt. Ist die Zeit unbeschränkt, so ist keine Grenze für die erreichbare Annäherung gegeben. Wenn man die Auffassung hat, dass durch conservative Vorgänge, wenn sie auch in der grössten Unordnung vor sich gehen, Irreversibilität nicht hervorgerufen werden kann, so wird man freie Ausbreitung in dem erwähnten Sinne für umkehrbar ansehen müssen.

Der zweite Satz bezog sich auf die Ausnahmestellung der magnetischen Drehung der Polarisationssebene und behauptete, dass hierbei eine uncompensirte Verwandlung im Clausius'schen Sinne möglich sei. In meiner ursprünglichen Darstellung ist eine Lücke enthalten, indem die Betrachtung des Strahlenganges nicht vollständig angegeben war. Hierdurch ist durchaus gerechtfertigt, was die Herren Brillouin und Planck gegen die gegebene Darstellung angeführt haben. Es war vergessen worden zu sagen, dass die magnetische Drehung erst dann von Einfluss ist, wenn man die von jedem Element ausgehenden Kegel betrachtet. Ich habe nun in Ergänzung meiner ersten Darstellung gezeigt, dass zwei Elemente, die durch ein magnetisches Medium hindurchstrahlen, einander nicht gleich viel Strahlung zusenden.

Hr. Planck hält nun für möglich, dass Strahlen, die gar nicht von dem einen Element in der Richtung zum anderen zugestrahlt werden, die Compensation liefern können. Schliesst man die ganze Strahlung in einen Raum mit adiabatischen Wänden ein, so muss aber das eine Element jedenfalls Ersatz für den Ausfall an Strahlung bekommen und zwar müssen die Strahlen, die den Ersatz leisten, nach dem Kirchhoff'schen Satze in derselben Richtung auffallen, wie es die Strahlen thun würden, die von dem anderen Element zugestrahlt würden, wenn die magnetische Drehung nicht vorhanden wäre. Es ist mir nicht möglich gewesen zu sehen, woher diese Strahlen



kommen sollen. Ich gebe indessen gern zu, dass eine geschärfte Kritik namentlich einer so fundamentalen Frage gegenüber durchaus geboten ist und eine erneute Untersuchung der Frage, wo in diesem Falle die Compensation steckt, erscheint dringend wünschenswert, doch bin ich selbst noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis gelangt.

(Eingegangen 29. December 1900.)

*Anmerkung bei der Correctur.* Von den Herren Jahnke, Lummer und Pringsheim<sup>1)</sup> ist soeben eine Entgegnung auf meine letzten Ausführungen<sup>2)</sup> erschienen, in der im wesentlichen die früheren Behauptungen wiederholt werden. Ich halte es daher für unnötig, noch einmal darauf einzugehen. Die hinzugefügte Bemerkung, die sich gegen die von mir ausgesprochene Vermutung richtet, dass man vielleicht eine Teilung des Strahlungsgesetzes vornehmen könnte, beruht auf einem Missverständnis. Ich habe ausdrücklich hinzugefügt, dass Abweichungen von dem aus molecularen Hypothesen entwickelten Gesetz mit zunehmender Temperatur zu kleineren Wellenlängen vorrücken müssen und damit ausgesprochen, dass bei einer festgehaltenen Wellenlänge in diesem Falle bei weiter steigender Temperatur zu den molecularen Wirkungen andere hinzukommen müssen, die sich bei tieferer Temperatur nur bei den langen Wellen zeigen.

1) E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim, *Ann. d. Phys.* 4. p. 225. 1901.

2) W. Wien, *Ann. d. Phys.* 3. p. 530. 1900.





